رایگان
شب امتحان
فیزیک دهم
دانلود جزوات
شب امتحان
رپیتیچ
ویدیو های
شب امتحان
سریعتر یادبگیریا

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

علی داودوندی
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی
مدرس ریاضی رپیتیچ

فصل ۱ : مجموعه، الگو و دنباله | **پایه دهم**

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه‌های مهم در ریاضیات عبارت‌اند از:

$N = \{1,2,3,...\}$ اعداد طبیعی $W = \{0,1,2,3,...\}$ اعداد حسابی

$Q = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in Z, n \neq 0\}$ اعداد گویا $Z = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$ اعداد صحیح

$Q' = \left\{\begin{array}{l}\text{مجموعه اعدادی که نتوانیم آن‌ها را به صورت نسبت} \\ \text{دو عدد صحیح بنویسیم مانند } \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ 1/666\end{array}\right\}$ اعداد گنگ $(R-Q)$

$R = Q \cup Q'$: اعداد حقیقی

رابطهٔ بین مجموعه‌های بالا به صورت $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ می‌باشد.

مثال: حاصل‌عبارت‌های زیر را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۲)

الف) $(Z \cup W) \cap Q$

ب) $(W-N) \cup Z$

حل: می‌دانیم اگر $A \subset B$ باشد، آن‌گاه: $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$ در نتیجه خواهیم داشت:

الف) $(\underbrace{Z \cup W}_{Z}) \cap Q = Z \cap Q = Z$

ب) $(\underbrace{W-N}_{\{0\}}) \cup Z = \{0\} \cup Z = Z$

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی **مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ**
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

بازه‌ها

۴ نوع بازه برای نمایش مجموعه‌هایی وجود دارد که همگی آن‌ها زیرمجموعهٔ R هستند:

$[a,b]$ بازهٔ بستهٔ $= \{x \in R \mid a \le x \le b\}$

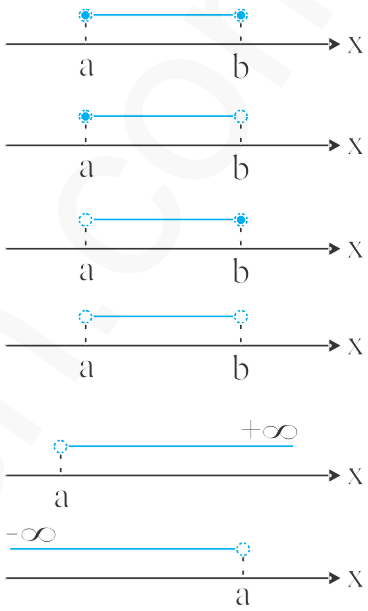
$[a,b)$ بازهٔ نیم‌باز $= \{x \in R \mid a \le x < b\}$

$(a,b]$ بازهٔ نیم‌باز $= \{x \in R \mid a < x \le b\}$

(a,b) بازهٔ باز $= \{x \in R \mid a < x < b\}$

$(a,+\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$

$(-\infty,a) = \{x \in R \mid x < a\}$



نکته: هر مجموعه مثل $R - \{a\}$ را می‌توانیم به صورت $(-\infty,a) \cup (a,+\infty)$ نیز نمایش دهیم. مثلاً $R - \{۲\}$ برابر است با $(-\infty,۲) \cup (۲,+\infty)$:

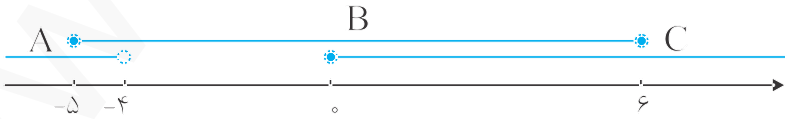
مثال: با فرض آن‌که $A = (-\infty,-۴)$، $B = [-۵,۶]$ و $C = [۰,+\infty)$ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(مشابه در کلاس صفحهٔ ۵)

الف) $(A \cup B) \cap C$

ب) $(A - B) \cup C$

حل:



الف) $A \cup B = (-\infty,۶] \Rightarrow (A \cup B) \cap C = (-\infty,۶] \cap [۰,+\infty) = [۰,۶]$

برای محاسبهٔ $A - B$ باید عضوهای مشترک A و B را از A حذف کرده، آن‌چه از A باقی می‌ماند $A - B$ است، به عبارت دیگر $A - B = A - (A \cap B)$.

$A - B = (-\infty,-۵) \Rightarrow (A - B) \cup C = (-\infty,-۵) \cup [۰,+\infty)$

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

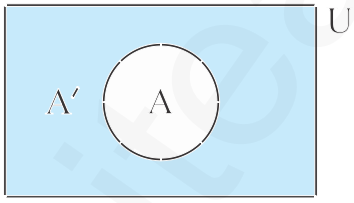
جواب به دست آمده را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اگر تعداد اعضای یک مجموعه، یک عدد حسابی باشد (حتی یک عدد حسابی خیلی بزرگ) به آن مجموعه، متناهی می‌گوییم؛ مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی ۸ رقمی، متناهی است و یا مجموعهٔ مولکول‌های موجود در یک مول آب (با آن‌که تعداد مولکول‌های بسیار زیاد هستند.) متناهی است ولی مجموعه‌هایی مثل N ، W ، Z ، Q ، Q' و R و یا بازه‌هایی مثل $(۱,۲)$ و $[۳,\infty)$ نامتناهی‌اند.

متمم یک مجموعه

اگر U مجموعهٔ مرجع باشد، (مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مورد بحث ما را شامل می‌شود.) آن‌گاه به مجموعهٔ $A' = U - A$ متمم مجموعهٔ A می‌گوییم. یعنی A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.



نکته: روابط زیر را حتماً حفظ کنید. (البته به کمک رسم نمودار هم می‌توان آن‌ها را اثبات کرد.(شماره‌های ۷، ۸، ۹ و ۱۰ خیلی مهم هستن.)

۱) $\varnothing' = U$

۲) $U' = \varnothing$

۳) $AUA' = U$

۴) $A \cap A' = \varnothing$

۵) $A - A' = A$

۶) $A' - A = A'$

۷) $(A')' = A$

۸) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۹) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۱۰) $A \cap B' = A - B = A - (A \cap B)$

مثال: الف) اگر Z مجموعهٔ مرجع باشد، مجموعه‌های N' ، W' ، Z' ، $\varnothing'$ و $(N \cup W)'$ را به دست آورید.

(جواب‌ها را روی محور نمایش دهید).

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی **مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ**
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

ب) اگر R مجموعهٔ مرجع باشد، علاوه بر قسمت (الف) حاصل R' را نیز تعیین کنید. (جواب‌ها را روی محور نمایش دهید.) (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۹)

حل:

الف) $N' = Z - N = \{..., -۲, -۱, ۰\}$

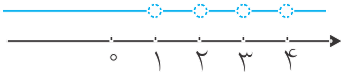
$W' = Z - W = \{..., -۲, -۱\}$

$Z' = \varnothing \quad , \quad \varnothing' = Z$

$(N \cup W)' = N' \cap W' = \{..., -۲, -۱, ۰\} \cap \{..., -۲, -۱\} = \{..., -۲, -۱\}$

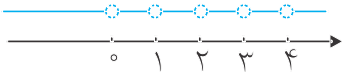
ب) $N = R - N$

اعداد طبیعی را توخالی می‌کنیم.



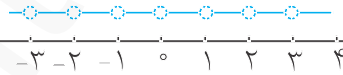
$W' = R - W$

اعداد حسابی را توخالی می‌کنیم.



$\Rightarrow (N \cup W)' = N' \cap W' = \underbrace{R - W}_{\text{محور پایینی}}$

$Z' = R - Z$



$, \quad R' = \varnothing \quad , \quad \varnothing' = R$

دو مجموعهٔ جدا از هم: اگر A و B دو مجموعه باشند که اشتراک آن‌ها $\varnothing$ باشد، اصطلاحاً می‌گوییم جدا از هم می‌باشند.

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

در حالت کلی تعداد اعضای مجموعهٔ $A \cup B$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

منظور از n تعداد اعضا می‌باشد.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

دقت کنید اگر $A \cap B = \varnothing$ باشد، آن‌گاه $n(A \cap B) = ۰$ خواهد بود. ضمناً مجموعهٔ $A \cap B$ شامل عضوهایی است که هم در A و هم در B باشند ولی $A \cup B$ شامل عضوهایی است که حداقل در یکی از مجموعه‌های A و B قرار دارند. (A یا B یا هر دو)

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی **مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ**
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

مثال: در یک گروه، ۳۱ نفر حضور دارند، ۱۸ نفر آن‌ها به فوتبال و ۷ نفر به والیبال علاقه دارند. اگر ۴ نفر هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه‌مند باشند، چند نفر حداقل به یکی از ورزش‌های فوتبال یا والیبال علاقه دارند؟ (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۱)

حل: A را مجموعهٔ علاقه‌مندان به فوتبال و B را مجموعهٔ علاقه‌مندان به والیبال می‌نامیم؛ لذا $n(A)=۱۸$ ، $n(B)=۷$ و $n(A\cap B)=۴$ بنابراین خواهیم داشت:

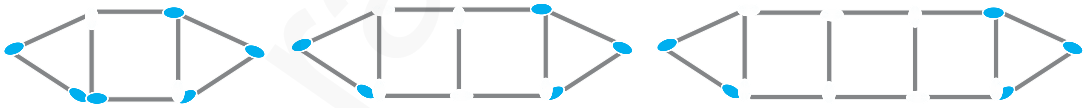
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cup B)=۱۸+۷-۴=۲۱$$

الگو

در این بخش معمولاً چند شکل دنباله‌دار (مرتبط با هم) به ما داده می‌شود و باید با توجه به نظمی که در شکل‌ها می‌بینیم، نحوهٔ تکمیل شدن شکل‌ها را بررسی کنیم تا قانون مربوط به آن الگو را کشف کنیم. در نهایت باید بتوانیم جملهٔ عمومی الگو را بنویسیم.

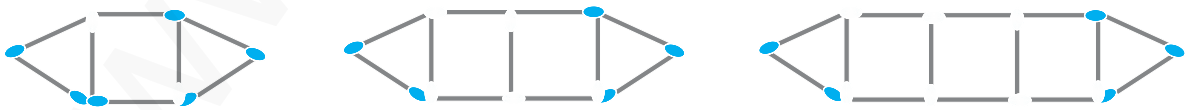
به کمک این جملهٔ عمومی، می‌توانیم مقدار هر جملهٔ دلخواه از الگو را به دست آوریم. (جملهٔ عمومی را با a_n، b_n، c_n، t_n و ... نمایش می‌دهیم.)

مثال: با توجه به شکل‌های زیر، جملهٔ عمومی (a_n) الگو را به دست آورده (یعنی شکل nام چند چوب کبریت دارد.) سپس مشخص کنید شکل دهم چند چوب کبریت دارد؟ (مقدار $a_{۱۰}$ چقدر است؟)



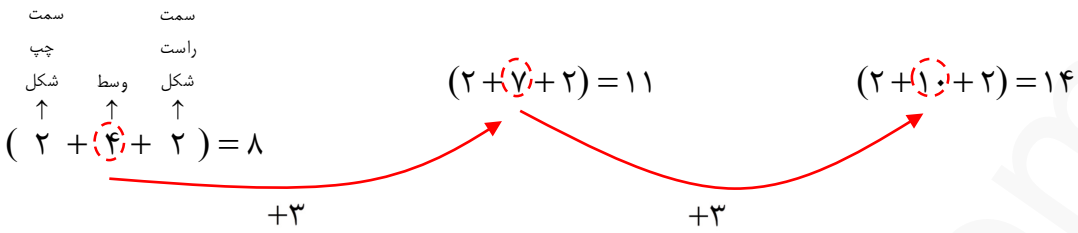
شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

حل:



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی **مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ**
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.



ملاحظه می‌کنید که ۲ها در تمام شکل‌ها ثابت‌اند ولی اعداد وسط ۳ تا ۳ تا زیاد می‌شوند. لذا:

جملهٔ عمومی: $a_n = [۲ + (۳n + ۱) + ۲] = ۳n + ۵$

دقت کنید که در جملهٔ عمومی، n همیشه اعداد طبیعی را اختیار می‌کند. اگر در $a_n = ۳n + ۵$ به جای n اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهیم به جواب‌های ۸، ۱۱ و ۱۴ می‌رسیم.

(همان تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل‌های اول، دوم و سوم)

حال برای محاسبهٔ $a_{۱۰}$ کافی است به جای n عدد ۱۰ را قرار دهیم:

تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل دهم:

$$a_n = ۳n + ۵ \xrightarrow{(n=۱۰)} a_{۱۰} = ۳(۱۰) + ۵ = ۳۵$$

الگوی خطی: در مثال قبل دیدید که اختلاف هر دو جملهٔ متوالی برابر ۳ بود. به این‌گونه الگوها که اختلاف هر دو جملهٔ متوالی آن‌ها، عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌گوییم و جملهٔ عمومی آن‌ها $a_n = kn + p$ می‌باشد. $(k, p \in R)$

شمارهٔ جملات	$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	...
مقدار جملات	۸	۱۱	۱۴	...
		+۳	+۳	

ضمناً اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، ضریب n می‌باشد. در مثال قبلی دیدید که $a_n = ۳n + ۵$ بود و تعداد چوب کبریت‌ها نیز ۳ تا ۳ تا زیاد شدند.

مثال: در یک الگوی خطی، جملات سوم و بیستم به ترتیب ۲ و ۳۶ هستند. جملهٔ عمومی الگو را به دست آورید.

(مشابه مثال صفحهٔ ۱۶)

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

حل: جملهٔ عمومی را به صورت $a_n = kn + p$ در نظر می‌گیریم. (یا می‌توانید به صورت $t_n = an + b$ فرض کنید.)

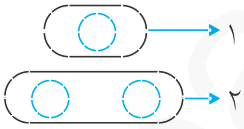
$$\begin{matrix} a_۳ = ۲ \Rightarrow k(۳) + p = ۲ \\ a_{۲۰} = ۳۶ \Rightarrow k(۲۰) + p = ۳۶ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۳k + p = ۲ \\ ۲۰k + p = ۳۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} k = ۲, p = -۴$$

پس جملهٔ عمومی این الگو برابر $a_n = ۲n - ۴$ می‌باشد. (بعدا می‌بینید که الگوهای خطی، همان دنبالهٔ حسابی هستند.)

الگوهای غیرخطی: گاهی اوقات جملات یک الگو با یک مقدار ثابت، زیاد یا کم نمی‌شوند؛ یعنی با الگوهای غیرخطی مواجه‌ایم. مثلاً الگوی زیر غیرخطی می‌باشد، حال جملهٔ عمومی‌اش را به دست می‌آوریم.

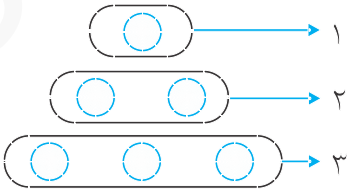
شکل (۱)

$a_۱ = ۱$



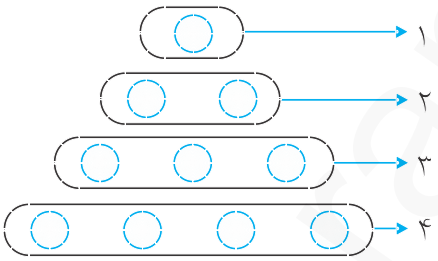
شکل (۲)

$a_۲ = ۱ + ۲$



شکل (۳)

$a_۳ = ۱ + ۲ + ۳$



شکل (۴)

$a_۴ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴$

$\Rightarrow$ شکل nام

$$\Rightarrow a_n = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \ldots + n$$

ضمناً به عنوان یک فرمول رابطهٔ $۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ را حفظ کنید، پس در این مثال می‌توان گفت:

$$a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

پس الگوی فوق، خطی نیست زیرا در $a_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ توان ۲ هم برای n وجود دارد.

دنباله

اگر یک سری از اعداد به طور متوالی پشت سر هم قرار گیرند، یک دنباله ایجاد می‌شود. پس اعداد مربوط به الگوها هم دنباله محسوب می‌شوند. به هر یک از این اعداد، جملات دنباله می‌گوییم. البته دقت کنید که در امتحانات مدارس همیشه شکل به شما داده نمی‌شود، گاهی اوقات چند جملهٔ اول دنباله داده می‌شود و باید جملهٔ عمومی آن را حدس بزنید.

مثال: در هر قسمت، سه جملهٔ بعدی دنباله را نوشته و جملهٔ عمومی آن را حدس بزنید: (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۹)

الف) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots$

ب) $0/1, 0/01, 0/001, \ldots$

پ) $-1, 8, -27, 64, \ldots$

حل:

الف) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \ldots$

جملهٔ عمومی دنباله: $a_n = \sqrt{n}$

ب) $0/1, 0/01, 0/001, 0/0001, 0/00001, 0/000001, \ldots$

یا $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$

جملهٔ عمومی دنباله: $a_n = 10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

پ) $-1, 8, -27, 64, \ldots$

$$\xrightarrow[\text{این‌جوری فرض کرد}]{\text{جملات را می‌توان}} \overbrace{-(1)^3}^{\text{جملهٔ اول}}, \underbrace{2^3}_{\text{جملهٔ دوم}}, \overbrace{-(3)^3}^{\text{جملهٔ سوم}}, \underbrace{4^3}_{\text{جملهٔ چهارم}}, -(5)^3, 6^3, -(7)^3, \ldots$$

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

ملاحظه می‌کنید که اولاً علامت‌ها یک در میان $(-)$ و $(+)$ هستند، پس فعلاً $(-1)^n$ را برای علامت‌ها در نظر می‌گیریم، ثانیاً شمارهٔ هر جمله به توان ۳ رسیده است؛ یعنی مثلاً در جملهٔ چهارم، ۴ به توان ۳ رسیده پس در جملهٔ nام، n به توان ۳ می‌رسد (n^3) حال خواهیم داشت:

$$a_n = (-1)^n \times n^3$$

دنبالهٔ حسابی: دنباله‌ای است که در آن، به تمام جملات مقداری ثابت اضافه یا از تمام جملات مقداری ثابت کم می‌شود؛ دنبالهٔ $1,3,5,7,\ldots$ و یا $10,7,4,\ldots$ (همان الگوهای خطی هستند که خواندیم.) به این عدد ثابت قدر نسبت می‌گوییم و معمولاً با d نمایش می‌دهیم. (در مثال اول $d=2$ و در بعدی $d=-3$ بود.) اگر جملهٔ اول را با a نشان دهیم، خواهیم داشت:

جملات	a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_n
بازشدهٔ جملات	a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	...	$a+(n-1)d$
		$+d$	$+d$	$+d$		$+d$

پس جملهٔ عمومی (جملهٔ nام) دنبالهٔ حسابی به صورت $a_n = a + (n-1)d$ می‌باشد. (به جای a و a_n می‌توانید از t_1 و t_n هم استفاده کنید.) پس خیلی سریع می‌توان گفت:

$$a_{20} = a + 19d \quad , \quad a_{100} = a + 99d \quad , \quad a_{41} = a + 40d$$

مثال: جملهٔ عمومی دنبالهٔ زیر را به دست آورده و به کمک آن a_{10} و a_{20} را محاسبه کنید. کدام جمله از این دنباله برابر ۲۰۰ است؟ $-6,-4,-2,\ldots$

حل: در دنبالهٔ حسابی، هر دو جملهٔ متوالی را که از هم کم کنیم، d به دست می‌آید ولی راحت‌تر است که از $d = a_2 - a_1$ استفاده کنیم:

$$d = a_2 - a_1 = (-4) - (-6) = 2$$

جملهٔ عمومی $a_n = a + (n-1)d \xrightarrow[d=2]{a=-6} a_n = -6 + (n-1)(2) = -6 + 2n - 2 = 2n - 8$

$$a_n = 2n - 8 \begin{cases} \xrightarrow{n=10} a_{10} = 2(10) - 8 = 12 \\ \xrightarrow{n=20} a_{20} = 2(20) - 8 = 32 \end{cases}$$

$$a_n = 2n - 8 \xrightarrow{a_n = 200} 200 = 2n - 8 \Rightarrow 2n = 208 \Rightarrow n = 104$$

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

پس جملهٔ صد و چهارم برابر با ۲۰۰ می‌باشد.

مثال: در یک دنبالهٔ حسابی جملات سوم و نهم به ترتیب ۱۱ و ۲۳ هستند، جملهٔ عمومی را به دست آورید.

(مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۲۴)

حل:

$$\begin{cases} a_{۳} = ۱۱ \\ a_{۹} = ۲۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + ۲d = ۱۱ \\ a + ۸d = ۲۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = ۷ \ , \ d = ۲$$

$$a_n = a + (n-۱)d \xrightarrow[d=۲]{a=۷} a_n = ۷ + (n-۱) \times ۲ = ۷ + ۲n - ۲ = ۲n + ۵$$

نکته: واسطهٔ حسابی بین دو عدد x و y برابر است با $\frac{x+y}{۲}$، یعنی اعداد $(x, \frac{x+y}{۲}, y)$ یک دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند. مثلاً واسطهٔ حسابی بین -۱ و ۵ برابر است با: $\frac{۵-۱}{۲} = ۲$. ضمناً در بعضی از سؤالات از شما خواسته می‌شود بین دو عدد x و y چند عدد دیگر (چند واسطهٔ حسابی) طوری قرار دهید که تمامی این اعداد، تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند که طبق مثال زیر عمل می‌کنیم. (برای این کار یک فرمول وجود داره ولی چون کتاب نگفته ما هم نمی‌گیم.)

مثال: بین دو عدد ۳ و ۲۷ پنج عدد طوری قرار دهید که با این دو عدد، تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۲۳)

حل:

$$\underset{\text{جملهٔ اول}}{\downarrow ۳} \ , \ \square \ , \ \square \ , \ \square \ , \ \square \ , \ \square \ , \ \underset{\text{جملهٔ هفتم}}{\downarrow ۲۷}$$

$$a_{۷} = ۲۷ \Rightarrow a + ۶d = ۲۷ \xrightarrow{a=۳} ۳ + ۶d = ۲۷ \Rightarrow ۶d = ۲۴ \Rightarrow d = ۴$$

$$\overset{+۴}{\underset{}{}} \ \overset{+۴}{\underset{}{}} \ \overset{+۴}{\underset{}{}} \ \overset{+۴}{\underset{}{}} \ \overset{+۴}{\underset{}{}} \ \overset{+۴}{\underset{}{}}$$

$$۳ \ , \ \boxed{۷} \ , \ \boxed{۱۱} \ , \ \boxed{۱۵} \ , \ \boxed{۱۹} \ , \ \boxed{۲۳} \ , \ ۲۷$$

واسطه‌های حسابی

دنبالهٔ هندسی: در این دنباله تمام جملات در یک عدد ثابت به نام قدرنسبت ضرب می‌شوند. مانند

... , ۱۸ , ۶ , ۲ , $\frac{۲}{۳}$, $\frac{۲}{۹}$, ... که قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را معمولاً با r نمایش می‌دهیم و برابر است با: $r = \frac{\text{جمله}}{\text{جملهٔ قبل}}$

تهیه و تنظیم: مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رایتیچ
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

متوالی. البته برای سادگی قدرنسبت را از رابطهٔ $r=\frac{a_۲}{a_۱}$ به دست می‌آوریم. برای یافتن جملهٔ عمومی به جدول زیر دقت کنید.

جملات	$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$	$a_۴$	...	a_n
بازشدهٔ جملات	a	$a.r$	$a.r^۲$	$a.r^۳$	...	$ar^{n-۱}$
		$\times r$	$\times r$	$\times r$		$\times r$

پس جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $a_n=a.r^{n-۱}$ یا $a_n=a.q^{n-۱}$ است؛ لذا خیلی سریع می‌توان گفت:

$a_{۱۰}=a.r^۹$، $a_{۱۰۰}=a.r^{۹۹}$ و $a_{۴۱}=a.r^{۴۰}$.

مثال: در دنبالهٔ زیر، جملهٔ عمومی و جملهٔ هشتم را به دست آورید. کدام جملهٔ این دنباله برابر -۴۰ است؟

$۵,-۱۰,۲۰,...$

حل: جملهٔ عمومی:

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{-۱۰}{۵}=-۲\quad,\quad a_n=ar^{n-۱}=۵\times(-۲)^{n-۱}$$

$$\xrightarrow{n=۸} a_۸=۵(-۲)^{۸-۱}=۵(-۲)^۷=-۶۴۰$$

$$a_n=۵\times(-۲)^{n-۱}\xrightarrow{a_n=-۴۰}-\cancel{۴۰}^{۸}=\cancel{۵}\times(-۲)^{n-۱}\Rightarrow -۸=(-۲)^{n-۱}$$

$$\Rightarrow(-۲)^۳=(-۲)^{n-۱}\Rightarrow n-۱=۳\Rightarrow n=۴$$

نکته: در سؤالاتی که دو جملهٔ دلخواه از دنبالهٔ هندسی به ما داده می‌شود هر یک از آن‌ها را با توجه به جملهٔ عمومی باز کرده سپس طرفین دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم تا r پیدا شود. با جای‌گذاری r در یکی از روابط a هم پیدا می‌شود. (همیشه بهتره رابطه‌ای که توان r در اون بزرگ‌تره رو در ردیف بالا قرار بدین.)

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی، جملات سوم و ششم به ترتیب ۱۵ و ۴۰۵ است، جملهٔ عمومی این دنباله را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۲۶)

حل:

$$\text{ردیف بالا}\Rightarrow a_۶=۴۰۵\Rightarrow ar^۵=۴۰۵\xrightarrow{\text{تقسیم روابط}}\frac{ar^۵}{ar^۲}=\frac{۴۰۵}{۱۵}$$

$$\text{ردیف پایین}\Rightarrow a_۳=۱۵\Rightarrow ar^۲=۱۵$$

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپتیچ
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

$$\Rightarrow r^{۳}=۲۷\Rightarrow r^{۳}=۳^{۳}\Rightarrow r=۳$$

$$\xrightarrow[ar^{۲}=۱۵]{\text{جایگذاری در}} a\times ۳^{۲}=۱۵\Rightarrow a=\frac{۱۵}{۹}$$

$$\Rightarrow a_n=a.r^{n-۱}=\frac{۱۵}{۹}\times ۳^{n-۱}$$

نکته: واسطهٔ هندسی بین اعداد x و y برابر است با $\pm\sqrt{xy}$ (به $\sqrt{xy}$ واسطهٔ هندسی مثبت و به $-\sqrt{xy}$ واسطهٔ هندسی منفی می‌گوییم)؛ یعنی اعداد $(x,+\sqrt{xy},y)$ و $(x,-\sqrt{xy},y)$ تشکیل، ۲ دنبالهٔ هندسی می‌گویند؛ مثلاً واسطهٔ هندسی مثبت بین ۴ و ۱۶ برابر است با: $\sqrt{۴\times ۱۶}=\sqrt{۶۴}=۸$ ضمناً گاهی اوقات، باید چند واسطهٔ هندسی بین دو عدد قرار دهیم که طبق مثال زیر عمل می‌کنیم.

مثال: بین دو عدد -۵ و ۱۶۰ چهار واسطهٔ هندسی قرار دهید. (جملهٔ اول -۵ است.) (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۲۶)

حل:

$$\underset{\text{جملهٔ اول } a}{\underset{\downarrow}{-۵}}\ ,\ \square\ ,\ \square\ ,\ \square\ ,\ \square\ ,\ \underset{a_۶}{\underset{\downarrow}{۱۶۰}}$$

$$a_۶=۱۶۰\Rightarrow ar^{۵}=۱۶۰\xrightarrow{(a=-۵)}-۵\times r^{۵}=۱۶۰$$

$$\Rightarrow r^{۵}=\frac{۱۶۰}{-۵}=-۳۲\Rightarrow r^{۵}=(-۲)^{۵}\Rightarrow r=-۲$$

$$\overset{\times(-۲)}{\frown}\quad\overset{\times(-۲)}{\frown}\quad\overset{\times(-۲)}{\frown}\quad\overset{\times(-۲)}{\frown}$$

$$-۵\ ,\ \boxed{۱۰}\ ,\ \boxed{-۲۰}\ ,\ \boxed{۴۰}\ ,\ \boxed{-۸۰}\ ,\ ۱۶۰$$

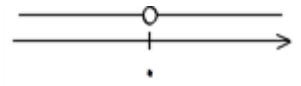
www.rapiteach.com

۱ اگر مجموعه اعداد حقیقی را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم. متمم مجموعه $W - N$ را روی محور نمایش دهید و به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

پاسخ: ۱

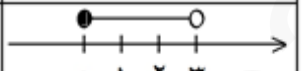
$W - N = \{۰\}$

بنابراین با توجه به اینکه مجموعه مرجع برابر اعداد حقیقی است، بنابراین متمم $\{۰\}$ برابر $R - \{۰\}$ است و بر روی محور بصورت زیر است.

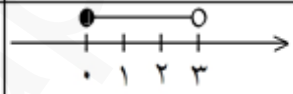
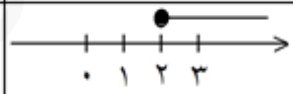


$(-\infty , ۰) \cup (۰ , +\infty)$

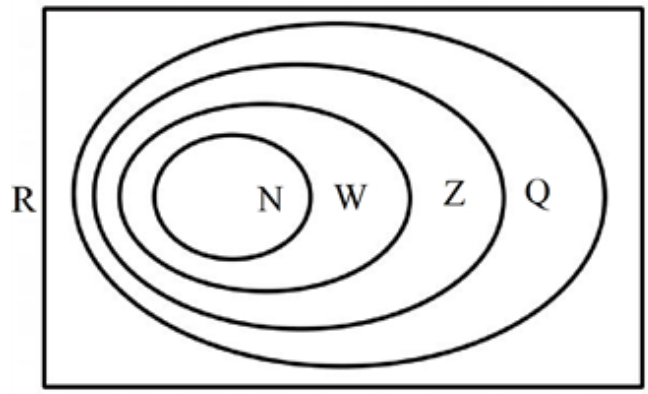
۲ جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
			
	$[۲ , +\infty)$		

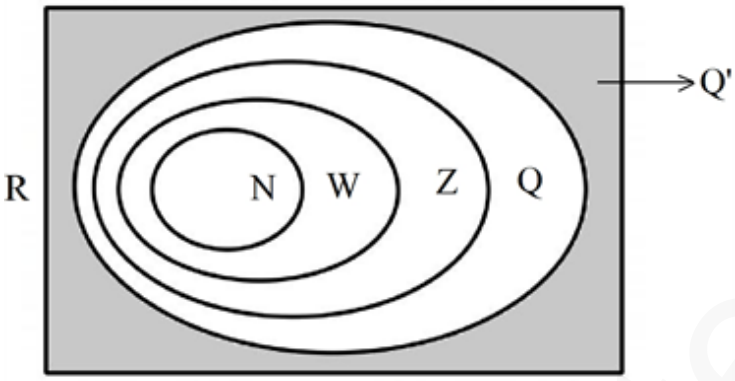
پاسخ: ۱

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز	$[۰ , ۳)$	$\{x \in R \mid ۰ \leq x < ۳\}$	
نیم‌باز	$[۲ , +\infty)$	$\{x \in R \mid x \geq ۲\}$	

۳ مجموعه $R-Q$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل زیر هاشور بزنید و دو عضو دلخواه برای آن مثال بزنید.



پاسخ: ۱ مجموعه اعداد گنگ و یا Q' نشان می‌دهند. $\sqrt{۵}$ و $\sqrt{۳}$



۴ اگر $\{x+۷, ۲y-۱\}=\{۵\}$ باشد، مقدار x و y را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} x+۷=۵ \Rightarrow x=-۲ \\ ۲y-۱=۵ \Rightarrow ۲y=۶ \Rightarrow y=۳ \end{cases}$$

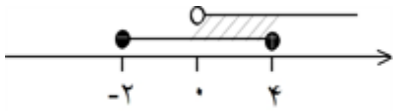
۵ حاصل عبارت‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

۱) $[-۲,۴]\cap(۰,+\infty)$

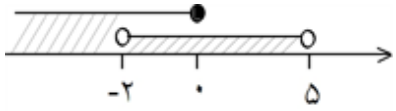
۲) $(-۲,۵)\cup(-\infty,۰]$

پاسخ: ۱

۱) $[-۲,۴]\cap(۰,+\infty)=(۰,۴]$



۲) $(-۲,۵)\cup(-\infty,۰]=(-\infty,۵)$



www.rapidteach.com

۶ درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $R - Z = Q'$

ب) مجموعه اعداد حسابی برابر است با: $W = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$

ج) $N - W = \{۰\}$

د) $N \subseteq Z \subseteq W \subseteq R$

پاسخ: **۱** الف) نادرست ب) درست ج) نادرست د) نادرست

۷ جاهای خالی را پر کنید.

الف) مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی است، ..... می‌نامیم.

ب) به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه‌ی ..... می‌گوییم.

پاسخ: **۱** الف) مجموعه‌های متناهی ب) مجزا (جدا از هم)

۸ اگر $A_i = ((-۱)^i + ۱, i^۲ + ۱)$ و $B = \left\{x | x \in \mathrm{R}, -۱ < \frac{۲x+۱}{۳} < ۵\right\}$ آن‌گاه جواب‌های خواسته شده را به صورت بازه بنویسید.

الف) $A_۳$ ب) B ج) $A_۳ - B$ د) $A_۳ \cap B$

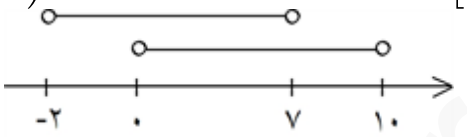
پاسخ: **۱**

الف) $A_۳ = (۰, ۱۰)$

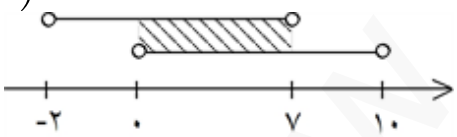
ب) $B : -۱ < \frac{۲x+۱}{۳} < ۵ \xrightarrow{\times ۳} -۳ < ۲x + ۱ < ۱۵ \xrightarrow{-۱} -۴ < ۲x < ۱۴$

$\xrightarrow{\div ۲} -۲ < x < ۷ \Rightarrow B = (-۲, ۷)$

ج) $A_۳ - B = (۰, ۱۰) - (-۲, ۷) = [۷, ۱۰)$



د) $A_۳ \cap B = (۰, ۱۰) \cap (-۲, ۷) = (۰, ۷)$



www.rapidteach.com

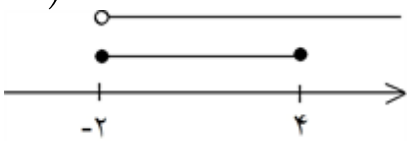
۹ حاصل بازه‌های زیر را به دست آورید.

الف) $[-۲, ۴] - (-۲, +\infty)$ ب) $[-۲, +\infty) \cap (-\infty, ۰)$

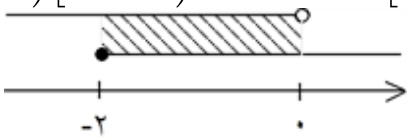
ج) $[-۲, ۲] \cup (۱, ۴)$ د) $(-\infty, ۲] - (-\infty, ۱]$

پاسخ: ۱

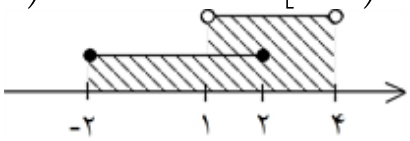
الف) $[-۲, ۴] - (-۲, +\infty) = \{-۲\}$



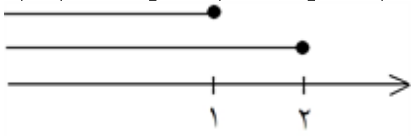
ب) $[-۲, +\infty) \cap (-\infty, ۰) = [-۲, ۰)$



ج) $[-۲, ۲] \cup (۱, ۴) = [-۲, ۴)$

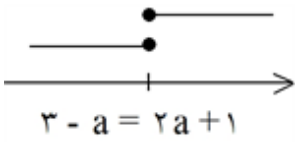


د) $(-\infty, ۲] - (-\infty, ۱] = (۱, ۲]$



۱۰ اگر اشتراک $A = [۲a + ۱, +\infty)$ و $B = (-\infty, ۳ - a]$ تک عضوی باشد مقدار a را حساب کنید.

پاسخ: ۱ باید بازه‌ها فقط در یک نقطه مشترک باشند.



$$۳ - a = ۲a + ۱ \Rightarrow -۳a = -۲ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

۱۱ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

پاسخ: ۱ متناهی

۱۲ دو مجموعه‌ی نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آن‌ها مجموعه‌ای متناهی باشد.

پاسخ: ۱ $[۰, ۲]$, $[۲, +\infty) \xrightarrow{\cap} \{۲\}$

www.rapidteach.com

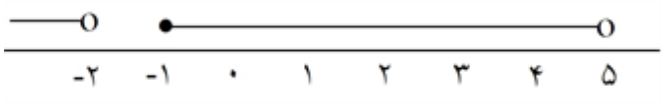
۱۳ اگر $A = \{x | x \in R, x < -۲\}$ و $B = \{x | x \in R, -۱ \leqslant x < ۵\}$ باشد حاصل عبارت‌های زیر را به صورت فاصله نوشته و روی محور نمایش دهید.

الف) $A \cup B$ ب) $A \cap B$

پاسخ: ۱

$A \cup B = (-\infty, -۲) \cup [-۱, ۵)$

$A \cap B = \{\}$



۱۴ فرض کنید $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{۴, ۵, ۶\}$ و $B = \{۱, ۳, ۶\}$. ابتدا جدول زیر را کامل کنید و سپس نتیجه‌گیری کنید.

B'	A - B	A ∩ B'

پاسخ: ۱

B'	A - B	A ∩ B'
{۲ , ۴ , ۵}	{۴ , ۵}	{۴ , ۵}

نتیجه می‌گیریم که:

$A - B = A \cap B'$

۱۵ در یک کلاس ۴۱ نفره، ۳۴ نفر به ریاضی و ۲۱ نفر به فیزیک علاقمند هستند و ۶ نفر به هیچ‌کدام از این دو درس علاقه ندارند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

الف) حداقل به یکی از این دو درس علاقمند باشند.

ب) فقط به یکی از این دو درس علاقمند باشند.

پاسخ: ۱ الف) A ریاضی و B را فیزیک در نظر می‌گیریم.

$n(U) = ۴۱$

$n(A) = ۳۴$

$n(B) = ۲۱$

$n(A' \cap B') = ۶ \Rightarrow n(A \cup B)' = ۶ \Rightarrow n(A \cup B) = n(U) - n(A \cup B)'$

$\Rightarrow n(A \cup B) = ۴۱ - ۶ = ۳۵$

ب)

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$۳۵ = ۳۴ + ۲۱ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۲۰$

$n(A \cup B) - n(A \cap B) = ۳۵ - ۲۰ = ۱۵$

www.rapidteach.com

۱۶ اگر $A=[-۱,+\infty)$ و $B=(-\infty,۳]$ باشد، آنگاه مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

الف) $A\cap B$

ب) $A-B$

ج) A'

پاسخ: ۱

الف) $A\cap B=\left[-۱,+\infty\right)\cap\left(-\infty,۳\right]=[-۱,۳]$

ب) $A-B=\left[-۱,+\infty\right)-\left(-\infty,۳\right]=(۳,+\infty)$

ج) $A'=(-\infty,-۱)$

۱۷ اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند و $n(A)+n(B)=۷n(A\cap B)$ آنگاه $\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=\frac{۷n(A\cap B)-n(A\cap B)}{n(A\cap B)}$$
$$\Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(A\cap B)}=\frac{۶n(A\cap B)}{n(A\cap B)}=۶$$

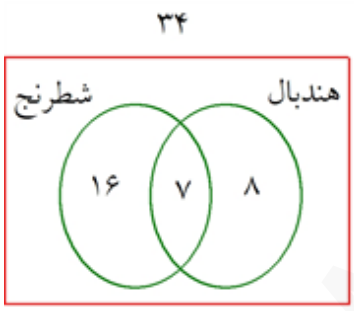
۱۸ در یک کلاس ۳۴ نفره، ۲۳ نفر به شطرنج و ۱۵ نفر به هندبال علاقه‌مند هستند. اگر ۷ نفر به هر دو رشته علاقه‌مند باشند مشخص کنید:

الف) چند نفر به شطرنج یا هندبال علاقه‌مند هستند؟

ب) چند نفر فقط به شطرنج یا فقط به هندبال علاقه‌مند هستند؟

ج) چند نفر به هیچ‌کدام علاقه‌مند نیستند؟

پاسخ: ۱



A: شطرنج

B: هندبال

الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۲۳+۱۵-۷=۳۱$

ب) $n(A\cup B)-n(A\cap B)=۳۱-۷=۲۴$

ج) $n(\cup)-n(A\cup B)=۳۴-۳۱=۳$

www.rapidteach.com

۱۹ اگر R مجموعه مرجع باشد متمم $A = [-۱, ۵)$ را به صورت بازه بنویسید.

پاسخ: ۱

$A' = (-\infty, -۱) \cup [۵, +\infty)$

۲۰ جدول زیر را کامل کنید.

n(U)	n(A)	n(B)	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$	n(B')	n(A - B)	$n(A' \cup B')$
۹۵	۴۴				۴۲		۸۳

پاسخ: ۱

$n(B) = n(U) - n(B') = ۹۵ - ۴۲ = ۵۳$

$n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B) \Rightarrow ۸۳ = ۹۵ - n(A \cap B)$

$\Rightarrow n(A \cap B) = ۱۲$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۴۴ + ۵۳ - ۱۲ = ۸۵$

$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۴۴ - ۱۲ = ۳۲$

n(U)	n(A)	n(B)	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$	n(B')	n(A - B)	$n(A' \cup B')$
۹۵	۴۴	۵۳	۱۲	۸۵	۴۲	۳۲	۸۳

۲۱ فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند، به طوری‌که $n(U) = ۱۰۰$، $n(A) = ۶۰$، $n(B) = ۴۰$ و $n(A \cap B) = ۲۰$ مطلوب است:

الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B)$ ت) $n(A' \cap B')$

پاسخ: ۱

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = ۶۰ + ۴۰ - ۲۰ = ۸۰$

ب) $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۶۰ - ۲۰ = ۴۰$

پ) $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۴۰ - ۲۰ = ۲۰$

ت) $n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = ۱۰۰ - ۸۰ = ۲۰$

www.riazisara.com

۲۲ یک دوره جشنواره‌ی فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم دو موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود داد، به طوری‌که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) پویانمایی یا طنزند.

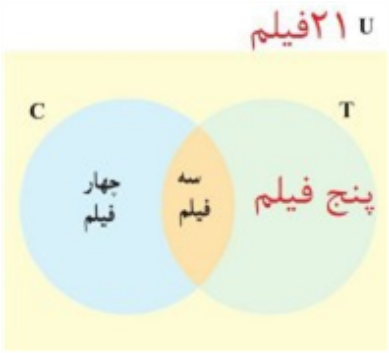
ب) غیرپایانمایی و غیرطنزند.

پاسخ: **۱** روش اول حل: مجموعه‌ی شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم.

الف) $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = ۷ + ۸ - ۳ = ۱۲$

ب) $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = ۲۱ - ۱۲ = ۹$

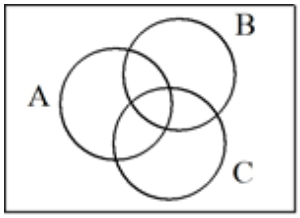
روش دوم حل: در نمودار وِن مقابل، دو مجموعه‌ی C و T سطح درون U را به چهار ناحیه‌ی جداگانه تقسیم کرده‌اند که عددِ مربوط به دو تا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.



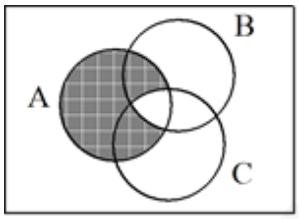
الف) پویانمایی یا طنز $= ۴ + ۳ + ۵ = ۱۲$

ب) غیرپویانمایی و غیرطنز $= ۲۱ - ۱۲ = ۹$

۲۳ در شکل روبه‌رو $A - (B \cap C)$ را رنگ کنید.



پاسخ: **۱**



www.rapiteach.com

۲۴ اگر A و B دو مجموعه و $n(A-B)=۱۲$ و $n(A\cup B)=۳۱$ و $n(B-A)=۱۴$ باشد. آن‌گاه $n(A)$ چه‌قدر است؟

پاسخ: **۱**

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$
$$۳۱=۱۲+۱۴+n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(A\cap B)=۳۱-۲۶=۵$$
$$n(A)=n(A-B)+n(A\cap B)=۱۲+۵=۱۷$$

۲۵ در الگوی خطی $a_n=(a-۱)n^۲+\text{bn}+۲\text{a}+۱$ اگر $a_{n+۲}-a_n=۴$ باشد:
الف) جمله عمومی دنباله خطی را بنویسید.
ب) کدام جمله دنباله خطی برابر ۴۹ است؟

پاسخ: **۱** الف) الگوی خطی نباید $n^۲$ داشته باشد، بنابراین ضریب $n^۲$ را صفر قرار می‌دهیم.

$$a-۱=۰\Rightarrow a=۱$$
$$\Rightarrow a_n=\text{bn}+۳$$
$$a_{n+۲}-a_n=۴\Rightarrow b(n+۲)+۳-(\text{bn}+۳)=۴$$
$$\Rightarrow \text{bn}+۲\text{b}+۳-\text{bn}-۳=۴\Rightarrow ۲\text{b}=۴\Rightarrow b=۲$$
$$a_n=۲\text{n}+۳$$

ب) باید جمله عمومی الگوی خطی را برابر ۴۹ قرار داد و n را حساب کنیم.

$$a_n=۴۹\Rightarrow ۲\text{n}+۳=۴۹\Rightarrow ۲\text{n}=۴۶\Rightarrow n=۲۳$$

بنابراین جمله بیست و سوم برابر ۴۹ است.

۲۶ در یک الگوی خطی با جمله عمومی t_n اگر $t_{n+۲}-t_n=۸$ و مجموع جملات هفتم و دهم برابر ۷۰ شود:
الف) جمله عمومی دنباله را حساب کنید.
ب) کدام جمله دنباله برابر ۵۳ است؟

پاسخ: **۱** الف) دنباله خطی به‌صورت $t_n=\text{an}+b$ است، بنابراین:

$$t_{n+۲}-t_n=۸\Rightarrow a(n+۲)+b-(\text{an}+b)=۸$$
$$\Rightarrow \text{an}+۲\text{a}+b-\text{an}-b=۸\Rightarrow ۲\text{a}=۸\Rightarrow a=۴$$
$$t_۷+t_{۱۰}=۷۰\Rightarrow ۷\text{a}+b+۱۰\text{a}+b=۷۰\xrightarrow{a=۴}۱۷(۴)+۲\text{b}=۷۰$$
$$\Rightarrow ۶۸+۲\text{b}=۷۰\Rightarrow ۲\text{b}=۲\Rightarrow b=۱$$
$$t_n=۴\text{n}+۱$$

ب) باید جمله عمومی به‌دست آمده را برابر ۵۳ قرار دهیم و n را حساب کنیم.

$$t_n=۵۳\Rightarrow ۴\text{n}+۱=۵۳\Rightarrow ۴\text{n}=۵۲\Rightarrow n=۱۳$$

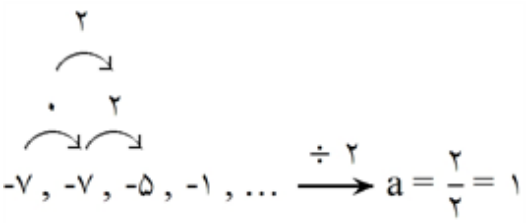
جمله سیزدهم برابر ۵۳ است.

www.rapidteach.com

۲۷ جمله عمومی دنباله درجه دو زیر را مشخص کنید.

$-۷, -۷, -۵, -۱, \cdots$

پاسخ: **۱**



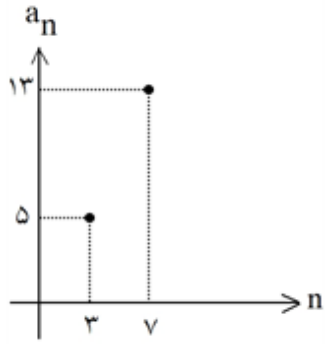
$۳a + b = a_۲ - a_۱ \Rightarrow ۳ + b = -۷ - (-۷) \Rightarrow b = -۳$

$a + b + c = a_۱ \Rightarrow ۱ - ۳ + c = -۷ \Rightarrow c = -۵$

در نهایت جمله عمومی به صورت زیر است:

$a_n = n^۲ - ۳n - ۵$

۲۸ شکل زیر قسمتی از نمودار الگوی خطی $a_n = (a-۱)n^۲ + bn + c$ است. جمله بیستم دنباله را حساب کنید.



پاسخ: **۱** الگوی خطی نباید درجه ۲ باشد. بنابراین باید ضریب $n^۲$ صفر باشد.

$a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱$

و با توجه به نمودار $a_۳ = ۵$ و $a_۷ = ۱۳$ است. بنابراین:

$$\begin{matrix} a_۳ = ۵ \Rightarrow ۳b + c = ۵ \\ a_۷ = ۱۳ \Rightarrow ۷b + c = ۱۳ \end{matrix} \Rightarrow ۴b = ۸ \Rightarrow b = ۲$$

$\xrightarrow{b=۲} ۳(۲) + c = ۵ \Rightarrow c = ۵ - ۶ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow a_n = ۲n - ۱$

سپس باید به جای n عدد ۲۰ را قرار دهیم تا جمله بیستم محاسبه شود.

$a_{۲۰} = ۲(۲۰) - ۱ = ۳۹$

www.rapidteach.com

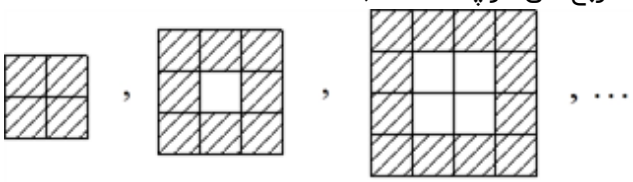
۲۹ در یک الگوی خطی جمله سوم برابر ۱۳ و جمله نهم برابر ۲۵ است. جمله عمومی این الگو را بنویسید.

پاسخ: **۱** جمله عمومی الگوی خطی $a_n = an + b$ است.

$$\begin{matrix} a_۳ = ۱۳ \Rightarrow ۳a + b = ۱۳ \\ a_۹ = ۲۵ \Rightarrow ۹a + b = ۲۵ \end{matrix} \Rightarrow ۶a = ۱۲ \Rightarrow a = ۲$$

$$\xrightarrow{a=۲} ۶ + b = ۱۳ \Rightarrow b = ۷ \Rightarrow a_n = ۲n + ۷$$

۳۰ با توجه به الگوی زیر جدول زیر را کامل کنید (همه دنباله‌ها برای مربع‌های کوچک است.)



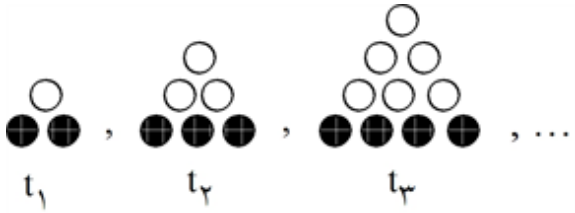
$t_۱$ $t_۲$ $t_۳$

	جمله چهارم	جمله پنجم	جمله ششم	جمله عمومی
کل مربعات				
مربعات سفید				
مربعات سیاه				

پاسخ: **۱**

	جمله چهارم	جمله پنجم	جمله ششم	جمله عمومی
کل مربعات	۲۵	۳۶	۴۹	$(n+۱)^۲$
مربعات سفید	۹	۱۶	۲۵	$(n-۱)^۲$
مربعات سیاه	۱۶	۲۰	۲۴	

۳۱ با توجه به الگوی زیر جدول زیر را کامل کنید. (همه دنباله‌ها برای دایره‌ها است.)



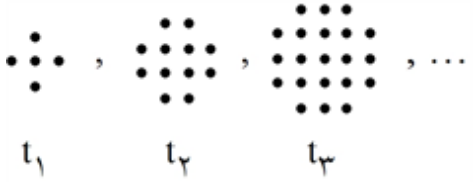
	جمله چهارم	جمله پنجم	جمله ششم	جمله عمومی
کل دایره‌ها				
دایره‌های سیاه				
دایره‌های سفید				

پاسخ: ۱

	جمله چهارم	جمله پنجم	جمله ششم	جمله عمومی
کل دایره‌ها	۱۵	۲۱	۲۸	$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$
دایره‌های سیاه	۵	۶	۷	$n+1$
دایره‌های سفید	۱۰	۱۵	۲۱	$\frac{n(n+1)}{2}$

www.rapiteach.com

۳۲ برای نقاط زیر جمله عمومی آن‌را بنویسید و سپس جمله دهم را حساب کنید.



پاسخ: **۱** روش اول: این یک دنباله مربعی است که روی هر ضلع آن به تعداد شماره دنباله نقطه وجود دارد و چون چهار ضلع داریم آن‌گاه:

$$t_n = n^2 + 4n \Rightarrow t_{10} = (10)^2 + 4(10) = 140$$

دنباله مربعی

نقاطی که روی چهار ضلع قرار دارد.

روش دوم: جملات دنباله را می‌نویسیم.

۵ , ۱۲ , ۲۱ , ...

۷ ، ۹

۲ ، ÷۲ → $a = \frac{2}{2} = 1$

$3a + b = t_2 - t_1 \Rightarrow 3(1) + b = 12 - 5 \Rightarrow 3 + b = 7 \Rightarrow b = 4$

$a + b + c = t_1 \Rightarrow 1 + 4 + c = 5 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow t_n = n^2 + 4n \xrightarrow{n=10} t_{10} = 10^2 + 4(10)$

$= 140$

۳۳ اگر در یک الگوی غیرخطی $a_n = (a+1)n^2 + an + b$، جمله اول برابر ۸ و جمله چهارم برابر ۵۹ باشد، a, b را حساب کنید و سپس جمله سوم را به دست آورید.

پاسخ: **۱**

$a_1 = 8 \Rightarrow a + 1 + a + b = 8 \Rightarrow 2a + b = 7$

$a_4 = 59 \Rightarrow 16a + 16 + 4a + b = 59 \Rightarrow 20a + b = 43$

$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 20a + b = 43 \end{cases} \Rightarrow 18a = 36 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{a=2} 2(2) + b = 7 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a_n = 3n^2 + 2n + 3$

$\xrightarrow{n=3} a_3 = 3(3)^2 + 2(3) + 3 = 27 + 6 + 3 = 36$

بنابراین جمله سوم برابر ۳۶ است.

www.tapitaan.com

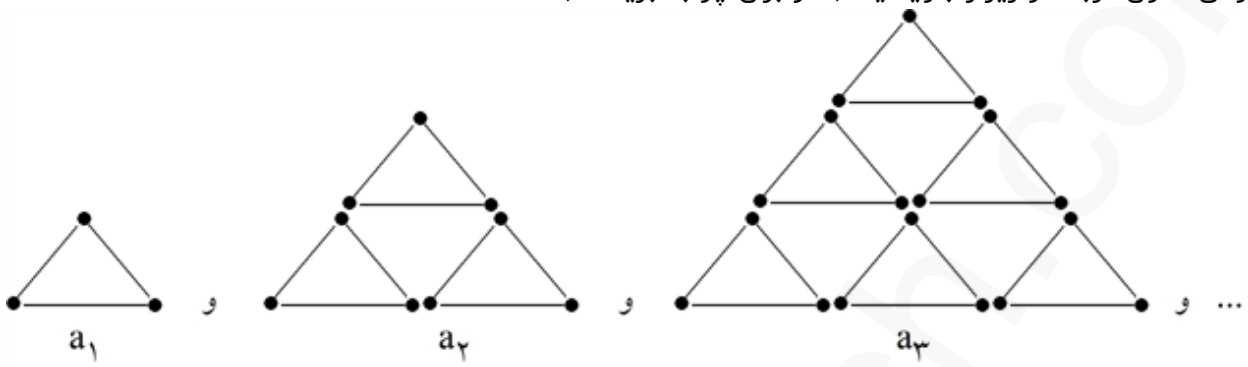
۳۴ در دنباله بازگشتی $b_n = ۲b_{n-۱} + b_{n-۲} (n \geq ۳)$ اگر $b_۱ = b_۲ = ۲$ باشند، دو جمله بعدی را بنویسید.

پاسخ: ۱

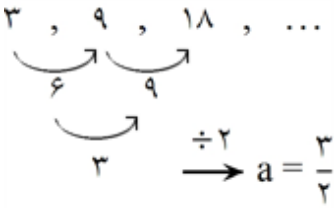
$$\xrightarrow{n=۳} b_۳ = ۲b_۲ + b_۱ = ۲(۲) + ۲ = ۶$$

$$\xrightarrow{n=۴} b_۴ = ۲b_۳ + b_۲ = ۲(۶) + ۲ = ۱۴$$

۳۵ جمله عمومی الگوی درجه دو زیر را بنویسید. (الگو برای چوب‌کبریت‌ها)



پاسخ: ۱ برای یافتن a, b, c در دنباله $a_n = an^۲ + bn + c$ داریم:



$$۳a + b = a_۲ - a_۱ \Rightarrow \frac{۹}{۲} + b = ۹ - ۳ \Rightarrow b = ۶ - \frac{۹}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

$$a + b + c = a_۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲} + c = ۳ \Rightarrow c = ۰$$

$$a_n = \frac{۳}{۲}n^۲ + \frac{۳}{۲}n$$

www.rapidteach.com

۳۶ در دنبالهٔ هندسی $۳, -۶, x, -۲۴, y, \cdots$
الف) قدر نسبت دنبالهٔ هندسی را حساب کنید.
ب) y و x را به دست آورید.
ج) جمله عمومی آن را محاسبه کنید.

پاسخ: ۱ الف)

$$r = \frac{a_۲}{a_۱} \Rightarrow r = \frac{-۶}{۳} = -۲$$

ب)

$$۳, -۶, ۱۲, -۲۴, ۴۸, \cdots \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۲ \\ y = ۴۸ \end{cases}$$

ج)

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \Rightarrow a_n = ۳(-۲)^{n-۱}$$

۳۷ در یک دنباله هندسی اگر $a_۱ + a_۳ = ۲۰$ و $a_۴ + a_۶ = ۵۴۰$ باشد، جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

پاسخ: ۱

$$a_۱ + a_۳ = ۲۰ \Rightarrow a_۱ + a_۱ r^۲ = ۲۰$$
$$a_۴ + a_۶ = ۵۴۰ \Rightarrow a_۱ r^۳ + a_۱ r^۵ = ۵۴۰$$

$$\frac{a_۱ r^۳ + a_۱ r^۵}{a_۱ + a_۱ r^۲} = \frac{r^۳(\cancel{a_۱ + a_۱ r^۲})}{\cancel{a_۱ + a_۱ r^۲}} = \frac{۵۴۰}{۲۰} \Rightarrow r^۳ = ۲۷ \Rightarrow r = ۳$$

$$a_۱ + a_۱ r^۲ = ۲۰ \xrightarrow{r=۳} a_۱ + ۹a_۱ = ۲۰ \Rightarrow ۱۰a_۱ = ۲۰ \Rightarrow a_۱ = ۲$$

بنابراین جمله عمومی برابر است با:

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \Rightarrow a_n = ۲(۳)^{n-۱}$$

۳۸ مقدار x را طوری بیابید که سه عبارت $x + ۱۹$ و $۲x + ۵$ و $۲x + ۷$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند.

پاسخ: ۱ اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، داریم:

$$۲b = a + c \Rightarrow ۲(۲x + ۵) = ۲x + ۷ + x + ۱۹ \Rightarrow ۴x + ۱۰ = ۳x + ۲۶ \Rightarrow x = ۱۶$$

www.rapidteach.com

۳۹ در یک دنباله حسابی اگر $a_{۷} = ۱۳$ و $a_{۱۸} = ۴۶$ باشد، جمله عمومی این دنباله را بیابید.

پاسخ: ۱

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_{۱۸} - a_{۷}}{۱۸ - ۷} = \frac{۴۶ - ۱۳}{۱۱} = \frac{۳۳}{۱۱} = ۳$$

$$a_{۷} = a_{۱} + ۶d = ۱۳ \xrightarrow{d=۳} a_{۱} + ۱۸ = ۱۳ \Rightarrow a_{۱} = -۵$$

$$a_n = a_{۱} + (n-۱)d \Rightarrow a_n = -۵ + (n-۱)(۳) \Rightarrow a_n = -۵ + ۳n - ۳ \Rightarrow a_n = ۳n - ۸$$

۴۰ اگر $\sqrt{x} - ۲, ۳, \sqrt{x} + ۲$ به‌ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$b^{۲} = ac \Rightarrow ۳^{۲} = x - ۴ \Rightarrow x = ۱۳$$ (ص ۸۳)

۴۱ جمله یازدهم یک دنباله حسابی ۳۲ و جمله نوزدهم آن ۷۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

پاسخ: ۱

$$d = \frac{۷۲ - ۳۲}{۱۹ - ۱۱} = \frac{۴۰}{۸} = ۵$$

$$a_{۱۱} = a_{۱} + ۱۰d \Rightarrow ۳۲ = a_{۱} + ۵۰$$

$$a_{۱} = -۱۸$$

$$a_{۳۰} = -۱۸ + ۲۹ \times ۵ = ۱۲۷$$ (ص ۶۷)

۴۲ سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد ۱۵ و ۲۳ قرار دهید که یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک مثبت تشکیل دهند.

پاسخ: ۱

$$d = \frac{a_m - a_n}{t + ۱} \Rightarrow d = \frac{۲۳ - ۱۵}{۵ - ۱} = ۲ \Rightarrow ۱۷, ۱۹, ۲۱$$

۴۳ به تعداد مربع‌های مشخص شده واسطه هندسی مثبت بین اعداد زیر را بنویسید.

۲						۸

پاسخ: ۱

$$\begin{matrix} t_{۱} = ۲ \\ t_{۷} = ۸ \end{matrix} \Rightarrow r^{۷-۱} = \frac{t_{۷}}{t_{۱}} \Rightarrow r^{۶} = \frac{۸}{۲} = ۴ \Rightarrow r = \pm\sqrt[۶]{۴} = \pm\sqrt[۶]{۲^{۲}} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[۳]{۲} & \text{ق ق} \\ r = -\sqrt[۳]{۲} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲	$۲\sqrt[۳]{۲}$	$۲\sqrt[۳]{۴}$	۴	$۴\sqrt[۳]{۲}$	$۴\sqrt[۳]{۴}$	۸

www.rapiteach.com

۴۴ در یک دنباله حسابی افزایشی، حاصل‌ضرب جمله اول و چهارم برابر ۵۲ و ضرب جملات دوم و سوم برابر ۷۰ است. قدرنسبت این دنباله را حساب کنید.

پاسخ: ۱ قدر نسبت این دنباله را برابر $۲t$ درنظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\underbrace{b-۳t}_{a_۱},\ \underbrace{b-t}_{a_۲},\ \underbrace{b+t}_{a_۳},\ \underbrace{b+۳t}_{a_۴}$$

$$a_۱ \times a_۴ = ۵۲ \Rightarrow (b-۳t)(b+۳t) = ۵۲ \Rightarrow b^۲ - ۹t^۲ = ۵۲$$

$$a_۲ \times a_۳ = ۷۰ \Rightarrow (b-t)(b+t) = ۷۰ \Rightarrow b^۲ - t^۲ = ۷۰$$

$$\begin{cases} b^۲ - ۹t^۲ = ۵۲ \\ b^۲ - t^۲ = ۷۰ \end{cases} \Rightarrow -۸t^۲ = -۱۸ \Rightarrow t^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow t = \pm\frac{۳}{۲}$$

چون دنباله افزایشی است بنابراین t را مثبت می‌گیریم: $t = \frac{۳}{۲} \Rightarrow d = ۲t \Rightarrow d = ۲\times\frac{۳}{۲} = ۳$

۴۵ در یک دنباله حسابی افزایشی، مجموع سه جمله اول برابر ۱۸ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱۶۸- است. جمله دوازدهم این دنباله حسابی را به دست آورید.

پاسخ: ۱ برای حل این سؤال جمله وسط را b درنظر می‌گیریم. $b-d, b, b+d$

مجموع این سه جمله: $b-d+b+b+d = ۱۸ \Rightarrow ۳b = ۱۸ \Rightarrow b = ۶$

ضرب این سه جمله:

$$(b-d)b(b+d) = -۱۶۸ \xrightarrow{b=۶} (۶-d)۶(۶+d) = -۱۶۸ \xrightarrow{\div ۶} ۳۶ - d^۲ = -۲۸$$

$$\Rightarrow d^۲ = ۶۴ \Rightarrow d = \pm ۸$$

چون دنباله افزایشی است $d = ۸$ درنظر می‌گیریم.

$$\xrightarrow[d=۸]{b=۶} -۲, ۶, ۱۴, \ldots \Rightarrow \begin{cases} a_۱ = -۲ \\ d = ۸ \end{cases} \Rightarrow a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow a_n = -۲ + (n-۱)(۸)$$

$$\Rightarrow a_n = ۸n - ۱۰ \xrightarrow{n=۱۲} a_{۱۲} = ۹۶ - ۱۰ = ۸۶$$

بنابراین جمله دوازدهم برابر ۸۶ است.

www.rapidgan.com

۴۶ علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه‌ی دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.
الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن‌را بفروشد؟
ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پاسخ: ۱ الف) کاهش ۲۰ درصدی قیمت به معنی آن است که قیمت هر سال ۸۰ درصد سال قبل است. بنابراین:

بعد از یک سال	بعد از دو سال	بعد از سه سال
$۵۰۰۰۰۰ \times \frac{۸۰}{۱۰۰}$	$۵۰۰۰۰۰ \times \left(\frac{۸۰}{۱۰۰}\right)^{۲}$	$۵۰۰۰۰۰ \times \left(\frac{۸۰}{۱۰۰}\right)^{۳} = ۲۵۶۰۰۰$

ب) $t_n = ۵۰۰۰۰۰ \times \left(\frac{۸۰}{۱۰۰}\right)^{n}$

۴۷ جملات چهارم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۵ و ۴۰۵ است، مقدار جمله اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

پاسخ: ۱

$$\begin{matrix} t_۷ = ۴۰۵ \Rightarrow t_۱ q^۶ = ۴۰۵ \\ t_۴ = ۱۵ \Rightarrow t_۱ q^۳ = ۱۵ \end{matrix} \Rightarrow \frac{t_۱ q^۶}{t_۱ q^۳} = \frac{۴۰۵}{۱۵} \Rightarrow q^۳ = ۲۷ \Rightarrow q = ۳$$

$$t_۱ q^۳ = ۱۵ \xrightarrow{q=۳} ۲۷ t_۱ = ۱۵ \Rightarrow t_۱ = \frac{۱۵}{۲۷} = \frac{۵}{۹}$$

۴۸ در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله‌ی اول ۱۱۲ و مجموع شش جمله‌ی اول ۱۲۶ است. قدر نسبت این دنباله را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$S_۳ = ۱۱۲ \rightarrow \frac{a(q^۳ - ۱)}{q - ۱} = ۱۱۲ \rightarrow a(q^۳ - ۱) = ۱۱۲(q - ۱)$$
$$S_۶ = ۱۲۶ \rightarrow \frac{a(q^۶ - ۱)}{q - ۱} = ۱۲۶ \rightarrow a(q^۶ - ۱) = ۱۲۶(q - ۱)$$

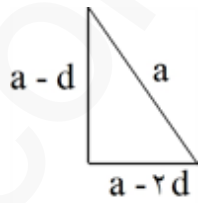
دو رابطه اخیر را به هم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{a(q^۳ - ۱)}{a(q^۶ - ۱)} = \frac{۱۱۲(q - ۱)}{۱۲۶(q - ۱)} \rightarrow \frac{۱}{q^۳ + ۱} = \frac{۱۱۲}{۱۲۶} = \frac{۸}{۹}$$
$$q^۳ + ۱ = \frac{۹}{۸} \rightarrow q^۳ = \frac{۱}{۸} \rightarrow q = \frac{۱}{۲}$$

۴۹ اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دنباله عددی بدهند صورت کلی آن دنباله چیست؟

پاسخ: **۱**

$$a^۲ = (a-d)^۲ + (a-۲d)^۲$$
$$a^۲ = ۲a^۲ - ۶ad + ۵d^۲ \rightarrow a^۲ - ۶ad + ۵d^۲ = ۰$$
$$\rightarrow (a-۵d)(a-d) = ۰ \rightarrow a = ۵d$$
$$\rightarrow \text{جملات دنباله} : ۳d, ۴d, ۵d$$



۵۰ سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله هندسی بیابید که مجموعشان ۳۱ و حاصل‌ضربشان ۱۲۵ باشد.

پاسخ: **۱**

$$a, b, c \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} b^۲ = ac$$
$$\begin{cases} abc = ۱۲۵ \xrightarrow{b^۲=ac} b^۲ \times b = ۱۲۵ \Rightarrow b^۳ = ۱۲۵ \Rightarrow b = ۵ \\ a+b+c = ۳۱ \xrightarrow{b=۵} a+۵+c = ۳۱ \Rightarrow a+c = ۲۶ \end{cases}$$
$$\xrightarrow{b=۵} \begin{cases} ac = ۲۵ \\ a+c = ۲۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲۵ \\ c = ۱ \end{cases}$$

پس جملات عبارتند از: ۱, ۵, ۲۵

www.rapiteach.com

رپیتیچ

سریعتر یاد بگیـــــــــر...!

با اساتید رتبه برتر و رتبه پرور
به همراه مشاورین رتبه برتر
تو هم رتبه برتر میشی رفیق

rapiteach.com