رایگان

شب امتحان

فیزیک دهم

دانلود جزوات
شب امتحان

رپیتیچ

ویدیو های
شب امتحان

سریعتر یادبگیریا

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

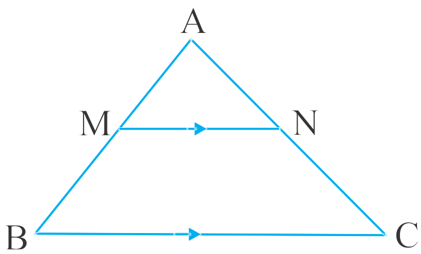
علی داودوندی
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی
مدرس ریاضی رپیتیچ

فصل ۲ : مثلثات — پایه دهم

فصل ۲: مثلثات

یادآوری قضیهٔ تالس

در مثلث ABC اگر پاره‌خط MN موازی یکی از اضلاع مانند BC رسم شود، آن‌گاه مثلث‌های AMN و ABC متشابه بوده و می‌توانیم روابط زیر را بنویسیم:



رابطهٔ جزء به جزء : $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

رابطهٔ جزء به کل : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

تعریف نسبت‌های مثلثاتی

به کمک تشابه می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به صورت زیر تعریف کنیم.

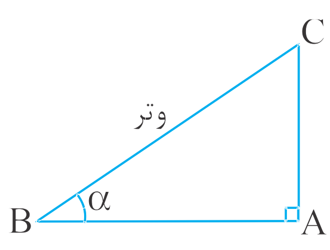
(چون در امتحان نیازی به اثبات نیست ما هم فقط فرمول‌ها رو می‌نویسیم.)

$$\sin\alpha=\frac{\text{ضلع‌مقابل } \alpha}{\text{وتر}}=\frac{AC}{BC}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{ضلع‌مجاور } \alpha}{\text{وتر}}=\frac{AB}{BC}$$

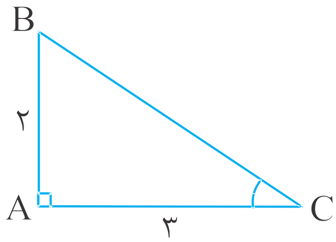
$$\tan\alpha=\frac{\text{ضلع‌مقابل } \alpha}{\text{ضلع‌مجاور } \alpha}=\frac{AC}{AB}$$

$$\cot\alpha=\frac{\text{ضلع‌مجاور } \alpha}{\text{ضلع‌مقابل } \alpha}=\frac{AB}{AC}$$



رابطهٔ فیثاغورس: $BC^۲=AB^۲+AC^۲$ (خیلی وقتا بهش نیاز داریم.)

مثال: در شکل زیر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\hat{C}$ را به دست آورید. (مشابه فعالیت صفحهٔ ۳۱)



حل: ابتدا به کمک رابطهٔ فیثاغورس، ضلع مجهول (در این‌جا وتر) را به دست می‌آوریم:

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۴ + ۹ = ۱۳ \xrightarrow{\text{جذر}} BC = \sqrt{۱۳}$$

$$\sin\hat{C} = \frac{\text{ضلع‌مقابل } \hat{C}}{\text{وتر}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}} \quad , \quad \cos\hat{C} = \frac{\text{ضلع‌مجاور } \hat{C}}{\text{وتر}} = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

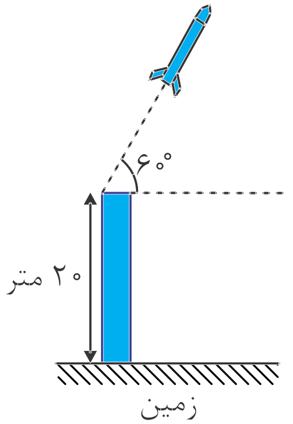
$$\tan\hat{C} = \frac{\text{ضلع مقابل } \hat{C}}{\text{ضلع مجاور } \hat{C}} = \frac{۲}{۳} \quad , \quad \cot\hat{C} = \frac{\text{ضلع‌مجاور } \hat{C}}{\text{ضلع‌مقابل } \hat{C}} = \frac{۳}{۲}$$

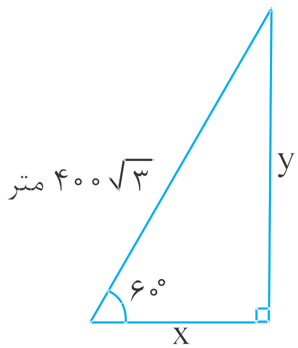
نکته: نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف به صورت جدول زیر است. (حتماً حفظ کنید.)

	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin A$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan A$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot A$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مثال: یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۶۰° پرتاب می‌شود. پس از طی $۴۰۰\sqrt{۳}$ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۳۳)

حل: با مسیر طی شده توسط موشک و سطح افقی، یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهیم:





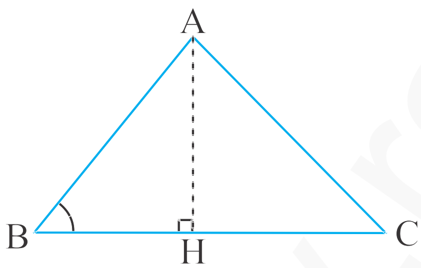
$$\Rightarrow \sin ۶۰^\circ = \frac{y}{۴۰۰\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} y = (\sin ۶۰^\circ)۴۰۰\sqrt{۳}$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴۰۰\sqrt{۳} = ۶۰۰ \text{ متر} \Rightarrow \text{ ارتفاع موشک از سطح زمین } = ۶۰۰ + ۲۰ = ۶۲۰ \text{ متر}$$

مثال: در هر مثلث با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع و اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها ثابت کنید که: (کار در کلاس صفحهٔ ۳۴)

$$\text{ABC مساحت} = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

حل: ابتدا ارتفاع AH از مثلث را رسم می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه ایجاد شود:



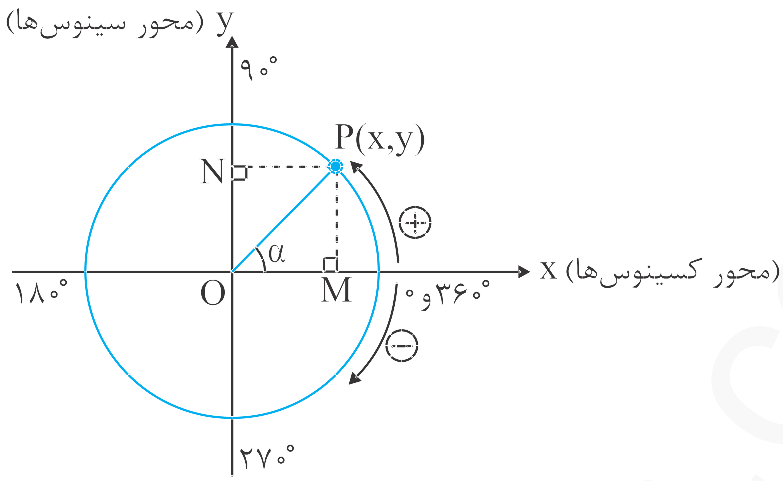
$$\text{در مثلث ABH}: \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin \hat{B}$$

$$\text{مساحت ABC}: S = \frac{۱}{۲} \times BC \times AH = \frac{۱}{۲} \times BC \times AB \times \sin \hat{B}$$

تذکر: رابطهٔ اخیر را حتماً حفظ کنید.

دایرهٔ مثلثاتی

دایره‌ای است به شعاع ۱ واحد که جهت مثبت در آن، خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. هر نقطه به مختصات $P(x, y)$ روی محیط این دایره، یک زاویهٔ مرکزی مانند α ایجاد می‌کند.



محور xها در این‌جا، محور کسینوس‌ها و محور yها محور سینوس‌ها نام دارد. از نقطهٔ P (انتهای زاویهٔ α) عمودی بر هر دو محور رسم می‌کنیم، پاره‌خط ON بیانگر $\sin\alpha$ و پاره‌خط OM بیانگر $\cos\alpha$ است.

$$\sin\alpha = ON \ , \ \cos\alpha = OM$$

و یا به بیان دیگر:

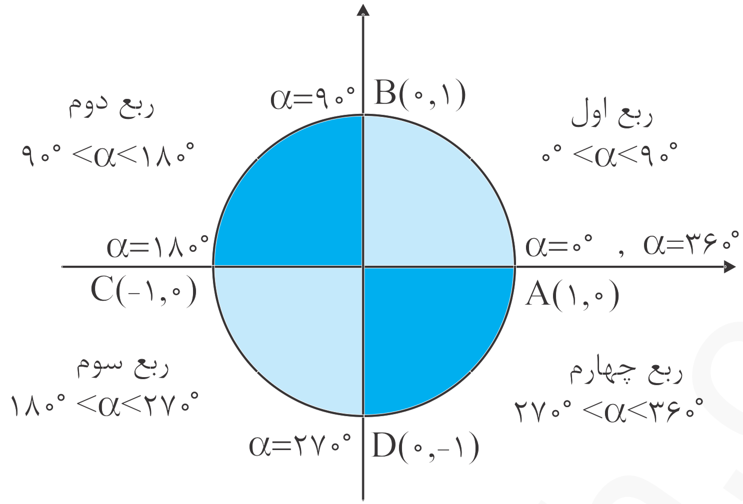
$$\cos\alpha = x \ , \ \sin\alpha = y$$

با به دست آمدن مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ می‌توانیم مقادیر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ را نیز به صورت زیر به دست آوریم:

$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha} = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ضمناً محورهای سینوس و کسینوس در دایرهٔ مثلثاتی، ۴ ناحیه (ربع) به صورت زیر ایجاد می‌کنند:



نتیجه:

	ربع‌اول	ربع‌دوم	ربع‌سوم	ربع‌چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

مثال: با فرض آن‌که $\sin\alpha <۰$ و $\tan\alpha >۰$ باشد، انتهای زاویهٔ α در کدام ناحیه (ربع) قرار دارد؟ (مشابه تمرین ۳ کتاب صفحهٔ ۴۱)

حل:

$$\begin{cases} \sin\alpha <۰ \xrightarrow{\text{باتوجه‌به‌جدول}} \alpha \text{ در ربع سوم یا چهارم است.} \\ \tan\alpha >۰ \xrightarrow{\text{باتوجه‌به‌جدول}} \alpha \text{ در ربع اول یا سوم است.} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}}$ α در ربع سوم است.

به کمک دایرهٔ مثلثاتی و مفهوم نسبت‌های مثلثاتی، می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی °۰، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰ و °۳۶۰ را به دست آوریم (جدول زیر). مثلاً در نقطهٔ $A(۱,۰)$ که معادل زاویهٔ صفر درجه است، خواهیم داشت:

$\sin\alpha =$ عرض نقطهٔ $A = ۰$, $\cos\alpha =$ طول نقطهٔ $A = ۱$

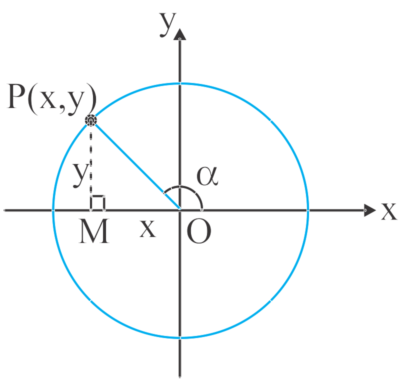
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۰}{۱} = ۰$, $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{۱}{۰} =$ تعریف نشده

برای زوایای °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰ و °۳۶۰ هم می‌توانیم مشابه این روش عمل کنیم تا به جدول زیر برسیم:

	°۰	°۹۰	°۱۸۰	°۲۷۰	°۳۶۰
$\sin\alpha$	۰	۱	۰	۱−	۰
$\cos\alpha$	۱	۰	۱−	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده	۰
$\cot\alpha$	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده	۰	تعریف‌نشده

مثال: اگر $\cos\alpha = \frac{-۵}{۶}$ و انتهای زاویهٔ α در ربع دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را به دست آورید.

(مشابه مثال کتاب صفحهٔ ۳۹)



حل: می‌دانیم $\cos\alpha = x = \frac{-۵}{۶}$ از طرفی در مثلث OPM شعاع OP

برابر یک است، پس به کمک فیثاغورس y را به دست می‌آوریم:

$$\text{OMP در مثلث}: OP^۲ = OM^۲ + MP^۲ \Rightarrow ۱^۲ = x^۲ + y^۲$$

$$\Rightarrow ۱ = (\frac{-۵}{۶})^۲ + y^۲ \Rightarrow y^۲ = ۱ - \frac{۲۵}{۳۶} = \frac{۱۱}{۳۶} \xrightarrow{\text{جذر}} y = \pm\sqrt{\frac{۱۱}{۳۶}} = \pm\frac{\sqrt{۱۱}}{۶}$$

ولی چون در ربع دوم y مثبت است، جواب $y = \frac{\sqrt{۱۱}}{۶}$ قابل قبول است؛ لذا:

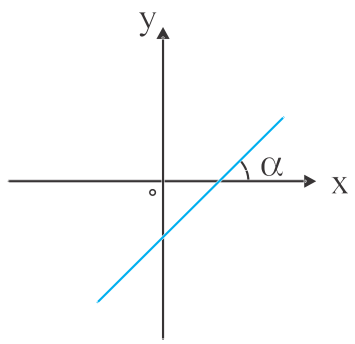
$$y = \sin\alpha = \frac{\sqrt{۱۱}}{۶}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{۱۱}}{\cancel{۶}}}{-\frac{۵}{\cancel{۶}}} = -\frac{\sqrt{۱۱}}{۵} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{۵}{\cancel{۶}}}{\frac{\sqrt{۱۱}}{\cancel{۶}}} = -\frac{۵}{\sqrt{۱۱}}$$

رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه

در شکل زیر شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت

محور xها می‌سازد، یعنی:



$\Rightarrow$ شیب خط $= m = \tan\alpha$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها، $۴۵°$ باشد و از نقطهٔ $A(۲,۳)$ نیز بگذرد.

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۴۰)

حل:

$$m = \tan\alpha = \tan ۴۵° = ۱$$
$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۳ = ۱(x - ۲)$$
$$\Rightarrow y = x - ۲ + ۳ \Rightarrow y = x + ۱$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد با فرض این‌که هیچ مخرجی صفر نیست، اتحادهای مثلثاتی زیر را خواهیم داشت:

$$۱)\ \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \begin{cases} \text{نتیجهٔ ۱}: \sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha \\ \text{نتیجهٔ ۲}: \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \end{cases}$$

$$۲)\ \tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \tan\alpha.\cot\alpha = ۱$$

$$۳)\ ۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$۴)\ ۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

مثال: اگر $\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$ و α در ربع سوم باشد به کمک اتحادهای مثلثاتی، سایر نسبت‌های مثلثاتی α را به دست آورید. (مشابه مثال صفحهٔ ۴۳)

حل:

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\frac{13}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{9}{13}\xrightarrow{\text{جذر}}\cos\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\xrightarrow{\alpha\ \text{دررربع‌سوم‌است}}\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{9}{13}=\frac{4}{13}\xrightarrow{\text{جذر}}\sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\xrightarrow{\alpha\ \text{در ربع سوم است}}\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{13}}$$

ضمناً می‌دانیم $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ همیشه عکس هم هستند؛ لذا: $\cot\alpha=\frac{3}{2}$

نکته: برای حل سؤالات مربوط به اتحادهای مثلثاتی، همیشه یک تساوی به ما داده می‌شود تا درستی یا نادرستی آن را بررسی کنیم که ما خودمان به دلخواه از طرف راست یا چپ تساوی شروع به ساده‌سازی و استفاده از فرمول‌ها می‌کنیم تا به طرف دیگر تساوی برسیم. (اگر دو طرف مساوی شدند، رابطهٔ داده شده اتحاد بوده و همیشه درست است. در غیر این صورت، رابطهٔ داده شده اتحاد نیست.) البته می‌توانیم هر دو طرف تساوی را نیز ساده کنیم و ببینیم به یک عبارت یکسان می‌رسیم یا خیر.

مثال: درستی یا نادرستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید. (مشابه مثال و کار در کلاس صفحهٔ ۴۴ کتاب)

الف) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin\alpha$

ب) $(1-\sin^2\theta)(1+\frac{1}{\cos^2\theta})-(1-\cos\theta)^2=2\cos\theta$

پ) $\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^4\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}-\cot^4\alpha$

حل:

الف) سمت چپ تساوی : $\underbrace{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}_{\text{اتحاد مزدوج}}=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1})$

$$=\sin^2\alpha-\underbrace{\cos^2\alpha}_{1-\sin^2\alpha}=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)=2\sin^2\alpha-1$$

پس تساوی داده شده، اتحاد نیست. (شاید به ازای مقادیر خاصی برای α دو طرف مساوی شوند ولی به ازای هر مقدار دلخواه برای α دو طرف، یکسان نمی‌شوند.)

ب) سمت چپ تساوی : $(\underbrace{1-\sin^2\theta}_{\cos^2\theta})(1+\frac{1}{\cos^2\theta})-\underbrace{(1-\cos\theta)^2}_{\text{اتحادمربع ۲جمله‌ای}}$

$$=\cos^2\theta(1+\frac{1}{\cos^2\theta})-(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)$$

$$=\cancel{\cos^2\theta}+\cancel{\cos^2\theta}(\frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}})-1+2\cos\theta-\cancel{\cos^2\theta}$$

$=1-1+2\cos\theta=2\cos\theta$ سمت راست تساوی

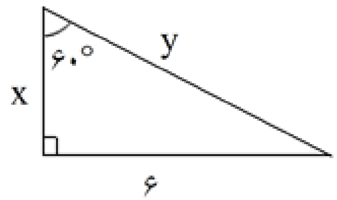
پس تساوی داده شده، صحیح است چون توانستیم از یک طرف آن، به طرف دیگرش برسیم.

پ) سمت راست تساوی : $\frac{1}{\sin^4\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}-\cot^4\alpha$

$$=(\frac{1}{\sin^2\alpha})^2-\frac{1}{\sin^2\alpha}-\cot^4\alpha=\underbrace{(1+\cot^2\alpha)^2}_{\text{اتحادمربع ۲جمله‌ای}}-(1+\cot^2\alpha)-\cot^4\alpha$$

$=\cancel{1}+2\cot^2\alpha+\cancel{\cot^4\alpha}-\cancel{1}-\cot^2\alpha-\cancel{\cot^4\alpha}=\cot^2\alpha$:سمت چپ تساوی

۱ با توجه به شکل رسم شده مقادیر x و y را محاسبه کنید.



پاسخ: ۱

$$\text{Sin}\,۶۰^{\circ} = \frac{۶}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۶}{y} \Rightarrow y = \frac{۱۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۳} = ۴\sqrt{۳}$$

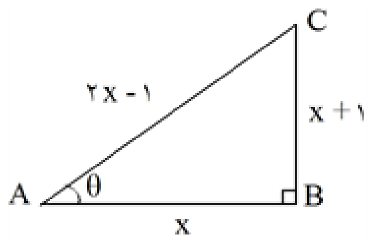
$$\tan ۶۰^{\circ} = \frac{۶}{x} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۶}{x} \Rightarrow x = \frac{۶}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۶\sqrt{۳}}{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

۲ در مثلث مقابل:

الف) ابتدا x را حساب کنید.

ب) طول اضلاع مثلث را بنویسید.

ج) نسبت‌های مثلثاتی θ را حساب کنید.



پاسخ: ۱ الف) در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$(۲x-۱)^{۲} = x^{۲} + (x+۱)^{۲} \Rightarrow ۴x^{۲} - ۴x + ۱ = x^{۲} + x^{۲} + ۲x + ۱$$

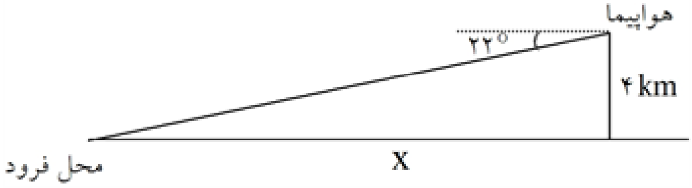
$$\Rightarrow ۲x^{۲} - ۶x = ۰ \Rightarrow ۲x(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{غ ق ق} \\ x = ۳ & \text{ق ق} \end{cases}$$

ب) $\begin{cases} AC = ۵ \\ AB = ۳ \\ BC = ۴ \end{cases}$

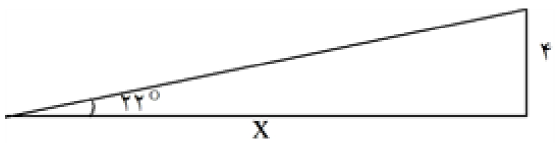
ج) $\text{Sin}\,\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{۴}{۵}, \text{Cos}\,\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{۳}{۵}$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{۴}{۳}, \text{Cotg}\,\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{۳}{۴}$$

۳ یک هواپیما در ارتفاع ۴ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق ۲۲° باشد، محل دقیق فرود هواپیما را مشخص کنید $(\text{tg}\,۲۲^\circ \simeq ۰/۴)$

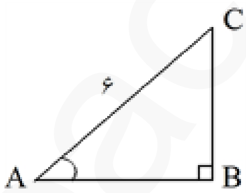


پاسخ: ۱



$$\text{tg}\,۲۲^\circ = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow ۰/۴ = \frac{۴}{x} \Rightarrow x = \frac{۴}{۰/۴} = ۱۰\,\text{km}$$

۴ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل اگر $\text{Sin}\,\widehat{A} = \frac{۱}{۳}$ باشد محیط مثلث را حساب کنید.



پاسخ: ۱

$$\text{Sin}\,\widehat{A} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BC}{۶} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow BC = ۲$$

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۳۶ = AB^۲ + ۴ \Rightarrow AB = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\text{محیط}\; P = ۶ + ۲ + ۴\sqrt{۲} = ۸ + ۴\sqrt{۲}$$

۵ مقدار A را حساب کنید.

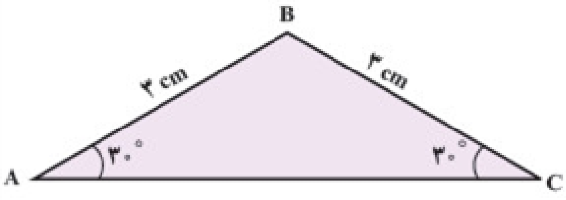
$$A = \text{Sin}^۲ ۴۵^\circ + \text{tg}^۲ ۶۰^\circ - ۶\,\text{Sin}\,۳۰^\circ$$

پاسخ: ۱

$$A = \text{Sin}^۲ ۴۵^\circ + \text{tg}^۲ ۶۰^\circ - ۶\,\text{Sin}\,۳۰^\circ = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + \left(\sqrt{۳}\right)^۲ - ۶\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$A = \frac{۱}{۲} + ۳ - ۳ = \frac{۱}{۲}$$

۶ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

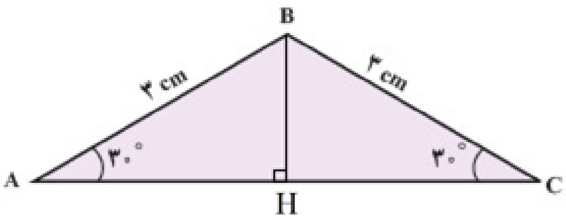


پاسخ: ۱ روش اول (با استفاده از ماشین‌حساب):

$$\widehat{B}+۳۰^\circ+۳۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B}=۱۲۰^\circ$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times۳\times۳\times \text{Sin}\,۱۲۰^\circ=\frac{۹}{۲}\times۰/۸۶۶=۳/۸۹۷$$

روش دوم (بدون استفاده از ماشین‌حساب):

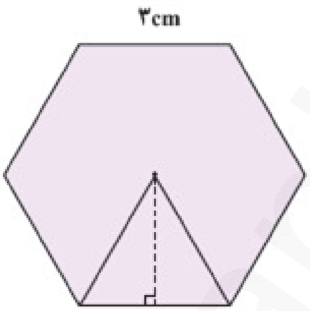


$$\text{Cos}\,۳۰^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{AH}{۳}\Rightarrow AH=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

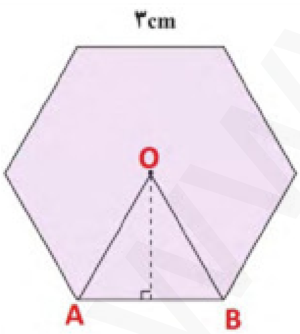
$$S_{\overset{\triangle}{ABH}}=\frac{۱}{۲}AH\times AB\times \text{Sin}\,۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۲\times S_{\overset{\triangle}{ABH}}=۲\times\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}=۳/۸۹۷$$

۷ مساحت شش‌ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



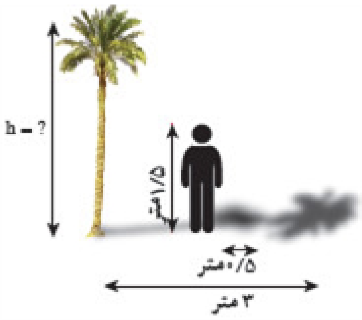
پاسخ: ۱ مطابق شکل، هر شش‌ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده است بنابراین مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است. بنابراین:
$$\left.\begin{array}{l}OA=۳\\ \widehat{A}=۶۰^\circ\end{array}\right\}$$



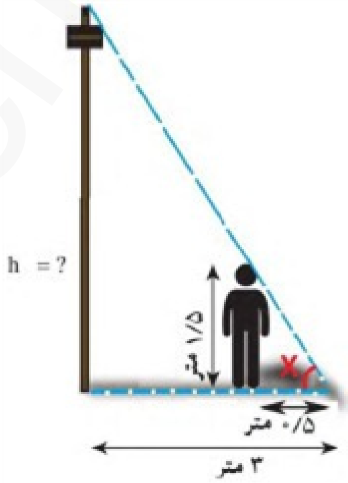
$$S_{AOB}=\frac{۱}{۲}OA\times AB\times \text{Sin}\,۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times۳\times۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم}=۶\times S_{AOB}=۶\times\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

۸ علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه‌ی آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چه‌قدر است؟



پاسخ: ۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی کوچک $\operatorname{tg} x = \frac{۱/۵}{۰/۵}$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی بزرگ $\operatorname{tg} x = \frac{h}{۳}$ می‌باشد. در نتیجه می‌توان نوشت: $\frac{۱/۵}{۰/۵} = \frac{h}{۳} \Rightarrow h = ۹$. یعنی ارتفاع تیر برق ۹ متر است.



۹ در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازه‌ی زاویه‌ی B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن‌را BH بنامید.

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه‌ی A به دست آورید.

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه‌ی ۶۵°، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$(\text{Sin } ۶۵^\circ \simeq ۰/۹)$

پاسخ: ۱ الف)

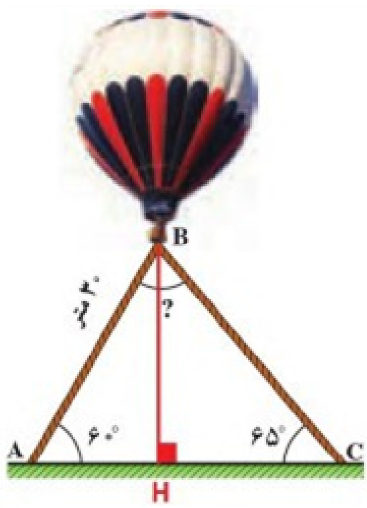
$$\widehat{B} + ۶۰^\circ + ۶۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B} = ۵۵^\circ$$

ب)

$$\text{Sin } ۶۰^\circ = \frac{\text{BH}}{\text{AB}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\text{BH}}{۳۰} \Rightarrow \text{BH} = ۱۵\sqrt{۳}$$

پ)

$$\text{Sin } ۶۵^\circ = \frac{\text{BH}}{\text{BC}} \Rightarrow ۰/۹۰۶ = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{\text{BC}} \Rightarrow \text{BC} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۰/۹۰۶} \simeq ۲۸/۶۶۶۵$$



۱۰ اگر α یک زاویه دلخواه باشد، حداکثر و حداقل هریک از عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\dfrac{۱-۵\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{۳}$

ب) $\mathrm{Sin}^{۲}\alpha-۲\,\mathrm{Sin}\,\alpha+۳$

پاسخ: ۱ می‌دانیم که $-۱\le \mathrm{Sin}\,\alpha\le ۱$ و $-۱\le \mathrm{Cos}\,\alpha\le ۱$ است. بنابراین با استفاده از آن‌چه می‌دانیم عبارت را می‌سازیم.

الف) $-۱\le \mathrm{Cos}\,\alpha\le ۱ \xrightarrow{\times(-۵)} ۵\ge -۵\,\mathrm{Cos}\,\alpha\ge -۵ \xrightarrow{+۱} ۶\ge ۱-۵\,\mathrm{Cos}\,\alpha\ge -۴$

$\xrightarrow{\div ۳} ۲\ge \dfrac{۱-۵\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{۳}\ge -\dfrac{۴}{۳}$

بیش‌ترین مقدار   کم‌ترین مقدار

ب) $\mathrm{Sin}^{۲}\alpha-۲\,\mathrm{Sin}\,\alpha+۳=\mathrm{Sin}^{۲}\alpha-۲\,\mathrm{Sin}\,\alpha+۱+۲=(\mathrm{Sin}\,\alpha-۱)^{۲}+۲$

$-۱\le \mathrm{Sin}\,\alpha\le ۱ \xrightarrow{-۱} -۲\le \mathrm{Sin}\,\alpha-۱\le ۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} ۰\le(\mathrm{Sin}\,\alpha-۱)^{۲}\le ۴$

$\xrightarrow{+۲} ۲\le(\mathrm{Sin}\,\alpha-۱)^{۲}+۲\le ۶$

کم‌ترین مقدار   بیش‌ترین مقدار

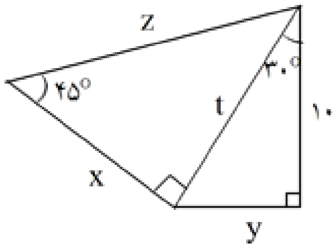
۱۱ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{\mathrm{Cotg}\,۶۰^\circ-\mathrm{tg}\,۳۰^\circ+۵\,\mathrm{Cotg}\,۴۵^\circ}{۸\,\mathrm{Cotg}\,۴۵^\circ-\mathrm{Sin}\,۹۰^\circ+۵\,\mathrm{tg}\,۴۵^\circ}=$$

پاسخ: ۱

$$\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}+۵}{۸-۱+۵}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۲ در شکل زیر طول اضلاع t ، z ، y و x را به دست آورید.



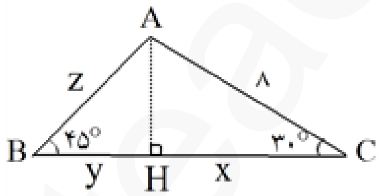
پاسخ: ۱

$$\mathrm{tg}\,۳۰^\circ = \frac{y}{۱۰} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{y}{۱۰} \Rightarrow y = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}, \mathrm{Cos}\,۳۰^\circ = \frac{۱۰}{t} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۰}{t} \Rightarrow t = \frac{۲۰}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\mathrm{tg}\,۴۵^\circ = \frac{t}{x} \Rightarrow ۱ = \frac{\frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳}}{x} \Rightarrow x = \frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳}, \mathrm{Sin}\,۴۵^\circ = \frac{t}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳}}{z}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۴۰\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴۰\sqrt{۶}}{۶} = \frac{۲۰\sqrt{۶}}{۳}$$

۱۳ در مثلث روبه‌رو، مقادیر x ، y و z را به دست آورید.



پاسخ: ۱ ۱ نمره

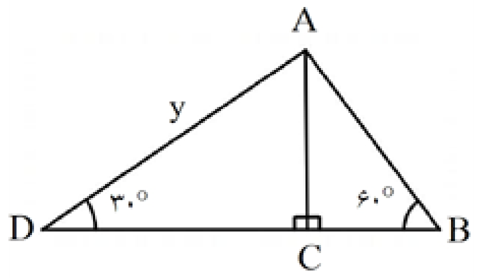
$$\overset{\triangle}{AHC} : \mathrm{Sin}\,۳۰^\circ = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{\mathrm{AH}}{۸} \Rightarrow \mathrm{AH} = ۴ \Rightarrow \mathrm{CH}^۲ = \mathrm{AC}^۲ - \mathrm{AH}^۲ = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸$$

$$\Rightarrow \mathrm{CH} = ۴\sqrt{۳} = x$$

$$\overset{\triangle}{AHB} : \mathrm{tg}\,۴۵^\circ = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}} \Rightarrow ۱ = \frac{۴}{y} \Rightarrow y = ۴, \mathrm{AB}^۲ = \mathrm{AH}^۲ + \mathrm{BH}^۲ = ۴^۲ + ۴^۲ = ۳۲$$

$$\Rightarrow \mathrm{AB} = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲} = z$$

۱۴ در شکل زیر y را حساب کنید. $(CB = ۴\sqrt{۳})$



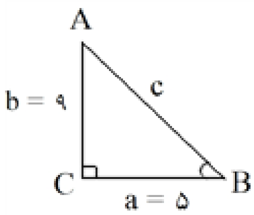
پاسخ: ۱

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \tan ۶۰^{\circ} = \frac{AC}{۴\sqrt{۳}} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{AC}{۴\sqrt{۳}} \Rightarrow AC = ۱۲$$

$$\text{Sin}\, \widehat{D} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \text{Sin}\, ۳۰^{\circ} = \frac{۱۲}{AD} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱۲}{AD} \Rightarrow AD = ۲۴ \Rightarrow y = ۲۴$$

۱۵ در مسئله‌ی زیر مثلث ABC در رأس C قائم‌الزاویه فرض شده است با استفاده از مفروضات داده شده آنچه خواسته شده است را به دست آورید: $a = ۵ \ , b = ۹ \ , \text{Sin}\, A = ?$

پاسخ: ۱



$$c = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}} = \sqrt{۲۵ + ۸۱} = \sqrt{۱۰۶}$$

$$\text{Sin}\, A = \frac{a}{c} \Rightarrow \text{Sin}\, A = \frac{۵}{\sqrt{۱۰۶}} = \frac{۵\sqrt{۱۰۶}}{۱۰۶}$$

۱۶ اگر $\text{Sin}\, \theta . \text{Cos}\, \theta > ۰$ باشد، آنگاه انتهای کمان θ در ربع .... یا .... قرار دارد.

پاسخ: ۱ اول - سوم

۱۷ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) خط $\sqrt{۳}x + ۷ = ۰ - y$ با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ .... می‌سازد.

ب) زاویه -۱۰۵° در ناحیه .... مثلثاتی قرار دارد.

پاسخ: ۱ الف) ۶۰°

ب) سوم

۱۸ اگر α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\text{Cos}\,\alpha = -\frac{۳}{۷}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را بیابید.

پاسخ: ۱ چون α در ربع دوم است، بنابراین به جز $\text{Sin}\,x$ مابقی منفی هستند.

$$\text{Sin}^{۲}\alpha + \text{Cos}^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow \text{Sin}^{۲}\alpha + \frac{۹}{۴۹} = ۱ \Rightarrow \text{Sin}^{۲}\alpha = \frac{۴۰}{۴۹} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sin}\,\alpha = \frac{\sqrt{۴۰}}{۷} \text{ ق ق} \\ \text{Sin}\,\alpha = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۷} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{۴۰}}{۷}}{-\frac{۳}{۷}} = -\frac{\sqrt{۴۰}}{۳} \Rightarrow \cot\alpha = -\frac{۳}{\sqrt{۴۰}} = \frac{-۳\sqrt{۴۰}}{۴۰}$$

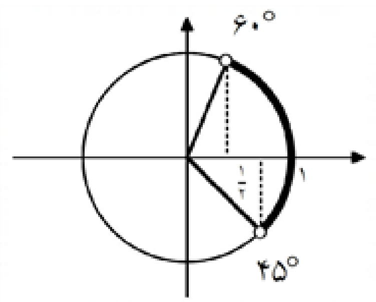
۱۹ معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x ها زاویهٔ ۶۰° بسازد و از نقطهٔ $A(۲\sqrt{۳}, -۷)$ نیز بگذرد.

پاسخ: ۱

$$m = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$
$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - (-۷) = \sqrt{۳}(x - ۲\sqrt{۳})$$
$$\Rightarrow y + ۷ = \sqrt{۳}x - ۶ \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۱۳$$

۲۰ اگر $-۴۵^\circ < \theta < ۶۰^\circ$ باشد و $\text{Cos}\,\theta = ۲\text{m} - ۱$ باشد، حدود m را حساب کنید.

پاسخ: ۱



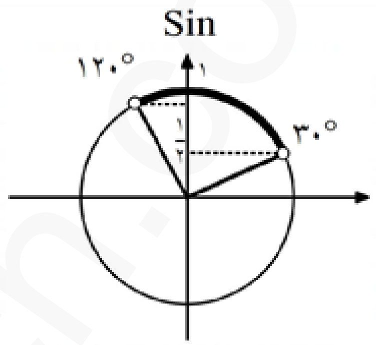
$$-۴۵^\circ < \theta < ۶۰^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \text{Cos}\theta \leqslant ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < ۲\text{m} - ۱ \leqslant ۱$$

$$\xrightarrow{+۱} \frac{۳}{۲} < ۲\text{m} \leqslant ۲ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۳}{۴} < \text{m} \leqslant ۱$$

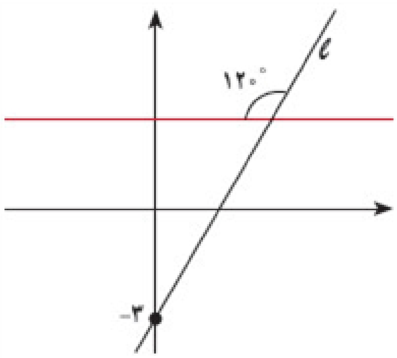
۲۱ اگر $۳۰^\circ < \theta < ۱۲۰^\circ$ باشد و $\text{Sin}\,\theta = \frac{۱-۳m}{۵}$ باشد، حدود m را حساب کنید.

پاسخ: ۱

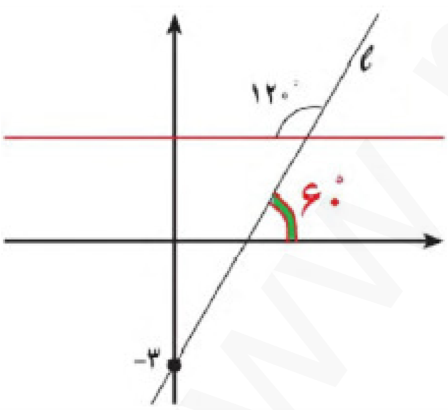
$$۳۰^\circ < \theta < ۱۲۰^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \text{Sin}\,\theta \leqslant ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۱-۳m}{۵} \leqslant ۱$$
$$\xrightarrow{\times ۵} \frac{۵}{۲} < ۱-۳m \leqslant ۵ \xrightarrow{-۱} \frac{۳}{۲} < -۳m \leqslant ۴$$
$$\xrightarrow{\div(-۳)} -\frac{۱}{۲} > m \geqslant -\frac{۴}{۳}$$



۲۲ با توجه به شکل زیر، معادله‌ی خط L را به دست آورید.



پاسخ: ۱



$$m = \text{tg}\,۶۰^\circ = \sqrt{۳}, (۰, -۳) \Rightarrow y-(-۳) = \sqrt{۳}(x-۰)$$
$$\Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۳$$

۲۳ در هریک از موارد زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف) $\operatorname{Sin}\alpha = \frac{۱}{۵}$ (α در ربع دوم)   ب) $\operatorname{Cos}\beta = -\frac{۲}{۳}$ (β در ربع سوم)

پاسخ: ۱ الف)

$$\operatorname{Sin}^{۲}\alpha + \operatorname{Cos}^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲۵} + \operatorname{Cos}^{۲}\alpha = ۱ \Rightarrow \operatorname{Cos}^{۲}\alpha = \frac{۲۴}{۲۵} \Rightarrow \operatorname{Cos}\alpha = \pm\frac{\sqrt{۲۴}}{۵}$$

$$\xrightarrow{\alpha\ \text{در ربع دوم}} \operatorname{Cos}\alpha = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{Sin}\alpha}{\operatorname{Cos}\alpha} = \frac{\frac{۱}{۵}}{-\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}} = \frac{۱}{-۲\sqrt{۶}} \Rightarrow \operatorname{Cotg}\alpha = -۲\sqrt{۶}$$

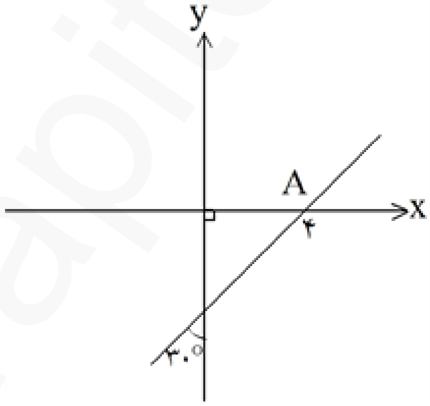
ب)

$$\operatorname{Sin}^{۲}\beta + \operatorname{Cos}^{۲}\beta = ۱ \Rightarrow \operatorname{Sin}^{۲}\beta + \frac{۴}{۹} = ۱ \Rightarrow \operatorname{Sin}^{۲}\beta = \frac{۵}{۹} \Rightarrow \operatorname{Sin}\beta = \pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

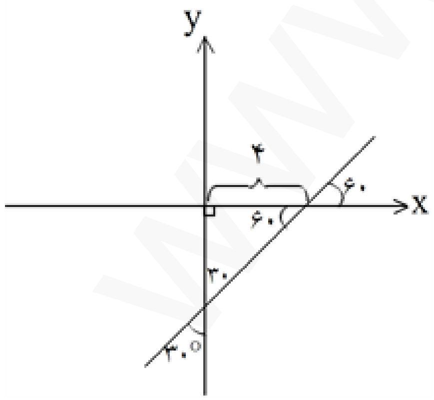
$$\xrightarrow{\beta\ \text{در ربع سوم}} \operatorname{Sin}\beta = -\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Cos}\beta} = \frac{-\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{-\frac{۲}{۳}} = \frac{\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow \operatorname{Cotg}\beta = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

۲۴ شیب خط زیر را تعیین کنید و معادله‌ی خط را بنویسید.



پاسخ: ۱



$$m = \operatorname{tg}۶۰^{\circ} \Rightarrow m = \sqrt{۳} \longleftarrow \text{شیب}$$

$$m = \frac{y_{۲}-y_{۱}}{x_{۲}-x_{۱}} \qquad A\left|\begin{matrix}۴\\ ۰\end{matrix}\right.$$

$$\sqrt{۳} = \frac{y-۰}{x-۴} \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۴\sqrt{۳} \longleftarrow \text{معادله خط}$$

۲۵ در تمرین زیر $\text{Sin}\,\theta$، $\text{Cos}\,\theta$، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را بدست آورید، می‌دانیم که θ زاویه‌ی شعاع $\overrightarrow{\text{OP}}$ با محور $\overrightarrow{O}x$ است.
$P(-۳, -۳)$

پاسخ: ۱

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۹ + ۹} = ۳\sqrt{۲}$$

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{-۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \qquad \text{Cos}\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{-۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۲}} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-۳}{-۳} = ۱ \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-۳}{-۳} = ۱$$

۲۶ در تمرین زیر $\text{Sin}\,\theta$، $\text{Cos}\,\theta$، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را بدست آورید، می‌دانیم که θ زاویه‌ی شعاع $\overrightarrow{\text{OP}}$ با محور $\overrightarrow{O}x$ است.
$P(-\sqrt{۲}, \sqrt{۶})$

پاسخ: ۱

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۲ + ۶} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \text{Cos}\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}} = \frac{-۱}{۲}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{۶}}{-\sqrt{۲}} = -\sqrt{۳}$$

۲۷ در مساله‌ی زیر مقدار r و یکی از نسبتهای مثلثاتی داده شده است مختصات نقطه‌ی P را به دست آورید.

$$r = ۴, \text{Cos}\,\theta = \frac{۱}{۲} \ (\text{در ربع چهارم})$$

پاسخ: ۱

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x}{۴} \Rightarrow x = ۲$$

$$\sqrt{x^۲ + y^۲} = r \Rightarrow \sqrt{۲^۲ + y^۲} = ۴ \Rightarrow ۴ + y^۲ = ۱۶ \Rightarrow y^۲ = ۱۲ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۱۲} \Rightarrow y = \pm ۲\sqrt{۳}$$

با توجه به این که p در ربع چهارم است پس باید $y < ۰$ باشد و داریم $y = -۲\sqrt{۳}$ در نتیجه:
$p(۲, -۲\sqrt{۳})$

۲۸ در تمرین زیر نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبتهای مثلثاتی را به دست آورید.

$\tan\theta = \frac{۵}{۴}$ (در ربع اول)

پاسخ: ۱ با توجه به این که نقطه p در ربع اول است $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{۵}{۴}$ می‌توانیم نقطه $p(۴,۵)$ را در نظر بگیریم:

$$\Rightarrow r = \sqrt{۴^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۴۱} \Rightarrow \text{Sin}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{۵}{\sqrt{۴۱}}, \text{Cos}\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{۴}{\sqrt{۴۱}}, \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{۴}{۵}$$

۲۹ حدود زاویه θ را در حالت مقابل مشخص کنید:

$\text{Cos}\,\theta > ۰, \tan\theta < ۰$

پاسخ: ۱ θ باید در ربع چهارم باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}\,\theta > ۰ \Rightarrow \theta \text{ در ربع اول یا چهارم} \\ \tan\theta < ۰ \Rightarrow \theta \text{ در ربع دوم یا چهارم}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Cos}\,\theta > ۰, \tan\theta < ۰ \Rightarrow ۲۷۰^\circ < \theta < ۳۶۰^\circ$$

۳۰ درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\tan\theta(۱ + \cot^۲\theta) = \frac{۱}{\text{Sin}\,\theta\,\text{Cos}\,\theta}$$

پاسخ: ۱ $$\tan\theta(۱ + \cot^۲\theta) = \tan\theta \times \frac{۱}{\text{Sin}^۲\theta} = \frac{\text{Sin}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta} \times \frac{۱}{\text{Sin}^۲\theta} = \frac{\text{Sin}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta \times \text{Sin}^۲\theta} = \frac{۱}{\text{Cos}\,\theta\,\text{Sin}\,\theta}$$

۳۱ حاصل عبارت $\frac{۱}{۱ - \text{Cos}\,\theta} + \frac{۱}{۱ + \text{Cos}\,\theta} - ۲\cot^۲\theta$ را به ساده‌ترین شکل بیابید.

پاسخ: ۱
$$\frac{۱}{۱ - \text{Cos}\,\theta} + \frac{۱}{۱ + \text{Cos}\,\theta} - ۲\cot^۲\theta = \frac{۱ + \text{Cos}\,\theta + ۱ - \text{Cos}\,\theta}{۱ - \text{Cos}^۲\theta} - ۲\cot^۲\theta$$
$$= \frac{۲}{\text{Sin}^۲\theta} - ۲\cot^۲\theta = ۲(۱ + \cot^۲\theta) - ۲\cot^۲\theta = ۲ + ۲\cot^۲\theta - ۲\cot^۲\theta = ۲$$

۳۲ درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$\frac{\operatorname{Cos}^{۴}\theta-\operatorname{Sin}^{۴}\theta}{\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Sin}\theta}=\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Sin}\theta$$

پاسخ: ۱

$$\frac{\operatorname{Cos}^{۴}\theta-\operatorname{Sin}^{۴}\theta}{\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Sin}\theta}=\frac{\overbrace{(\operatorname{Cos}^{۲}\theta+\operatorname{Sin}^{۲}\theta)}^{۱}(\operatorname{Cos}^{۲}\theta-\operatorname{Sin}^{۲}\theta)}{\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Sin}\theta}$$

$$=\frac{\cancel{(\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Sin}\theta)}(\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Sin}\theta)}{\cancel{(\operatorname{Cos}\theta-\operatorname{Sin}\theta)}}=\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Sin}\theta$$

۳۳ با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\operatorname{Sin}\theta}\times\operatorname{tg}\theta=\frac{۱}{\operatorname{Cos}\theta}$

ب) $\frac{\operatorname{Cos}\theta}{۱+\operatorname{Sin}\theta}=\frac{۱-\operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Cos}\theta}$

پ) $\frac{۱+\operatorname{tg}\alpha}{۱+\operatorname{Cotg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

ت) $۱-\frac{\operatorname{Cos}^{۲}x}{۱+\operatorname{Sin}x}=\operatorname{Sin}x$

ث) $\frac{۱}{\operatorname{Cos}x}-\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{Cos}x}{۱+\operatorname{Sin}x}$

پاسخ: ۱ الف)

$$\text{چپ}=\frac{۱}{\cancel{\operatorname{Sin}\theta}}\times\frac{\cancel{\operatorname{Sin}\theta}}{\operatorname{Cos}\theta}=\frac{۱}{\operatorname{Cos}\theta}$$

ب)

$$\text{چپ}=\frac{\operatorname{Cos}\theta}{۱+\operatorname{Sin}\theta}\times\frac{۱-\operatorname{Sin}\theta}{۱-\operatorname{Sin}\theta}=\frac{\operatorname{Cos}\theta(۱-\operatorname{Sin}\theta)}{۱-\operatorname{Sin}^{۲}\theta}=\frac{\cancel{\operatorname{Cos}\theta}(۱-\operatorname{Sin}\theta)}{\operatorname{Cos}^{\cancel{۲}}\theta}=\frac{۱-\operatorname{Sin}\theta}{\operatorname{Cos}\theta}$$

پ)

$$\text{چپ}=\frac{۱+\operatorname{tg}\alpha}{۱+\operatorname{Cotg}\alpha}=\frac{۱+\operatorname{tg}\alpha}{۱+\frac{۱}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\,\cancel{(۱+\operatorname{tg}\alpha)}}{\cancel{\operatorname{tg}\alpha+۱}}=\operatorname{tg}\alpha$$

ت)

$$\text{چپ}=۱-\frac{\operatorname{Cos}^{۲}x}{۱+\operatorname{Sin}x}=۱-\frac{۱-\operatorname{Sin}^{۲}x}{۱+\operatorname{Sin}x}=۱-\frac{(۱-\operatorname{Sin}x)\cancel{(۱+\operatorname{Sin}x)}}{\cancel{۱+\operatorname{Sin}x}}$$

$$=۱-۱+\operatorname{Sin}x=\operatorname{Sin}x$$

ث)

$$\text{چپ}=\frac{۱}{\operatorname{Cos}x}-\operatorname{tg}x=\frac{۱}{\operatorname{Cos}x}-\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}=\frac{۱-\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}\times\frac{۱+\operatorname{Sin}x}{۱+\operatorname{Sin}x}=\frac{۱-\operatorname{Sin}^{۲}x}{\operatorname{Cos}x(۱+\operatorname{Sin}x)}$$

$$=\frac{\operatorname{Cos}^{\cancel{۲}}x}{\cancel{\operatorname{Cos}x}(۱+\operatorname{Sin}x)}=\frac{\operatorname{Cos}x}{۱+\operatorname{Sin}x}$$

۳۴ اگر $\sqrt{۳} = \text{tg}\,۲۴۰^\circ$، آن‌گاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویه‌ی ۲۴۰° را به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$\frac{۱}{\text{Cos}^۲\alpha} = ۱ + \text{tg}^۲\alpha = ۱ + ۳ = ۴ \Rightarrow \text{Cos}^۲\alpha = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{Cos}\,\alpha = -\frac{۱}{۲}, \text{Sin}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$$
$$= \sqrt{۳} \times \frac{-۱}{۲} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۵ کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\text{Sin}^۴\alpha + \text{Cos}^۴\alpha = ۱ - ۲\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$

ب) $\text{Sin}^۴\alpha + \text{Cos}^۴\alpha = ۱ - ۲\,\text{Sin}^۲\alpha\,\text{Cos}^۲\alpha$

پاسخ: ۱

الف) $\alpha = ۳۰^\circ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۴ = ۱ - ۲ \times \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} + \frac{۹}{۱۶} = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\Rightarrow$ تساوی صحیح نیست

ب) $\alpha = ۳۰^\circ \Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴ + \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۴ = ۱ - ۲ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ \times \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} + \frac{۹}{۱۶} = ۱ - \frac{۶}{۱۶}$

$\Rightarrow$ تساوی صحیح است

حال باید درستی آن‌را در حالت کلی اثبات نماییم:

$$\text{Sin}^۴\alpha + \text{Cos}^۴\alpha = (\underbrace{\text{Sin}^۲\alpha + \text{Cos}^۲\alpha}_{۱})^۲ - ۲\,\text{Sin}^۲\alpha\,\text{Cos}^۲\alpha = ۱ - ۲\,\text{Sin}^۲\alpha\,\text{Cos}^۲\alpha$$

۳۶ ثابت کنید:

$$\frac{۱ + \text{Sin}\,x}{\text{Sin}\,x} + \frac{\text{Cotg}\,x - \text{Cos}\,x}{\text{Cos}\,x} = \frac{۲}{\text{Sin}\,x}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{۱ + \text{Sin}\,x}{\text{Sin}\,x} + \frac{\text{Cotg}\,x - \text{Cos}\,x}{\text{Cos}\,x} = \frac{(۱ + \text{Sin}\,x)\,\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x\left(\frac{\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x} - \text{Cos}\,x\right)}{\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x}$$
$$= \frac{(۱ + \text{Sin}\,x)\,\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x\left(\frac{\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x} - \text{Cos}\,x\right)}{\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x}$$
$$= \frac{\text{Cos}\,x + \cancel{\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x} + \text{Cos}\,x - \cancel{\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x}}{\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x} = \frac{۲\,\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x} = \frac{۲}{\text{Sin}\,x}$$

سمت چپ تساوی با سمت راست آن برابر شد، پس رابطه‌ی داده شده صحیح است.

۳۷ درستی تساوی $\dfrac{۱ - tg^{۲}\theta}{۱ + tg^{۲}\theta} = ۲\,Cos^{۲}\theta - ۱$ را ثابت کنید.

پاسخ: ۱ ۱/۲۵ نمره

$$\frac{۱ - tg^{۲}\theta}{۱ + tg^{۲}\theta} = \frac{۱ - \frac{Sin^{۲}\theta}{Cos^{۲}\theta}}{\frac{۱}{Cos^{۲}\theta}} = \frac{\frac{Cos^{۲}\theta - Sin^{۲}\theta}{Cos^{۲}\theta}}{\frac{۱}{Cos^{۲}\theta}} = Cos^{۲}\theta - Sin^{۲}\theta$$
$$= Cos^{۲}\theta - (۱ - Cos^{۲}\theta) = ۲\,Cos^{۲}\theta - ۱$$

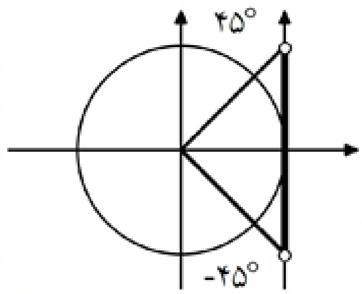
۳۸ عبارت مقابل را بر حسب $Cos\,\theta$ بنویسید: $(۱ - \tan^{۲}\theta)(\tan^{۲}\theta + ۱)$

پاسخ: ۱

$$(۱ - \tan^{۲}\theta)(\tan^{۲}\theta + ۱) = ۱ - \tan^{۴}\theta = ۱ - \frac{Sin^{۴}\theta}{Cos^{۴}\theta} = \frac{Cos^{۴} - Sin^{۴}\theta}{Cos^{۴}\theta}$$
$$= \frac{(\cancel{Cos^{۲}\theta + Sin^{۲}\theta})(Cos^{۲}\theta - Sin^{۲}\theta)}{Cos^{۴}\theta} = \frac{Cos^{۲}\theta - Sin^{۲}\theta}{Cos^{۴}\theta} = \frac{Cos^{۲}\theta - (۱ - Cos^{۲}\theta)}{Cos^{۴}\theta}$$
$$= \frac{۲\,Cos^{۲}\theta - ۱}{Cos^{۴}\theta}$$

۳۹ اگر $-۴۵^{\circ} < \theta < ۴۵^{\circ}$ و $\tan\theta = ۲k - ۵$ باشد، حدود k را حساب کنید.

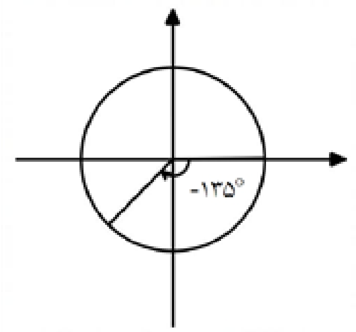
پاسخ: ۱



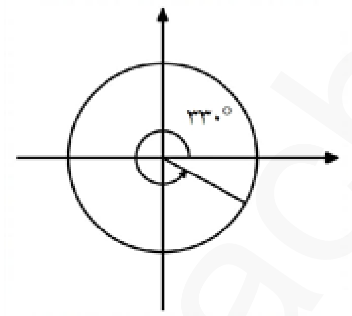
$$-۴۵^{\circ} < \theta < ۴۵^{\circ} \Rightarrow -۱ < \tan\theta < ۱ \Rightarrow -۱ < ۲k - ۵ < ۱$$
$$\xrightarrow{+۵} ۴ < ۲k < ۶ \xrightarrow{\div ۲} ۲ < k < ۳$$

۴۰ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید و سپس مشخص کنید در کدام‌یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) -۱۳۵° ب) ۳۳۰°



پاسخ: ۱ الف) ربع سوم



ب) ربع چهارم

۴۱ برای هر قسمت مشخص کنید α در کدام ربع قرار دارد.

الف) $\operatorname{Sin}\alpha < ۰$ و $\operatorname{Cos}\alpha < ۰$ ب) $\tan\alpha < ۰$ و $\operatorname{Cos}\alpha > ۰$

پاسخ: ۱ الف) ربع سوم ب) ربع چهارم

۴۲ اگر $\cot\theta = -۵$ و θ در ربع چهارم باشد، نسبت‌های مثلثاتی دیگر آن را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$۱+\cot^{۲}\theta = \frac{۱}{\operatorname{Sin}^{۲}\theta} \Rightarrow ۱+۲۵ = \frac{۱}{\operatorname{Sin}^{۲}\theta} \Rightarrow \operatorname{Sin}^{۲}\theta = \frac{۱}{۲۶}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}\theta = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲۶}} \xrightarrow{\text{ربع چهارم Sin منفی است}} \operatorname{Sin}\theta = -\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}$$

$$\operatorname{Cos}^{۲}\theta = ۱-\operatorname{Sin}^{۲}\theta \Rightarrow \operatorname{Cos}^{۲}\theta = ۱-\frac{۱}{۲۶} = \frac{۲۵}{۲۶} \Rightarrow \operatorname{Cos}\theta = \pm\frac{۵}{\sqrt{۲۶}}$$

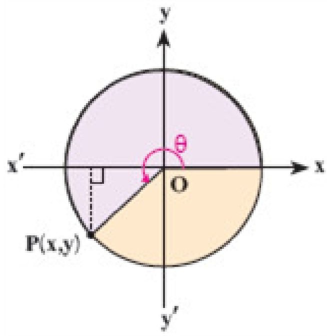
$$\xrightarrow{\text{در ربع چهارم Cos مثبت است}} \operatorname{Cos}\theta = \frac{۵}{\sqrt{۲۶}}$$

$$\tan\theta = \frac{۱}{\cot\theta} = \frac{۱}{-۵}$$

۴۳ جاهای خالی را پر کنید.
شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با .... زاویه‌ی بین آن خط و جهت .... محور افقی.

پاسخ: ۱ تانژانت - مثبت

۴۴ فرض کنید نقطه‌ی P روی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد به طوری‌که $\operatorname{Cos}\theta=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y=\operatorname{Sin}\theta=...$.
الف) مختصات نقطه‌ی P را به دست آورید.
ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ را به دست آورید.



پاسخ: ۱ $y=\operatorname{Sin}\theta=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

الف) $\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$

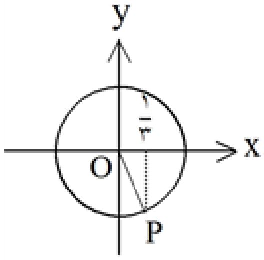
ب) $\operatorname{Cotg}\theta=\frac{x}{y}=۱\ ,\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=۱$

۴۵ اگر $\operatorname{Sin}\theta>۰$ و $\operatorname{tg}\theta<۰$ باشد، آن‌گاه انتهای کمان θ در کدام ناحیه‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

پاسخ: ۱ ۱ نمره
سینوس در ناحیه‌های اول و دوم، مثبت و تانژانت در ناحیه‌ی دوم و چهارم، منفی می‌باشند، بنابراین اگر θ در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد، آن‌گاه $\operatorname{Sin}\theta>۰$ و $\operatorname{tg}\theta<۰$

۴۶ نقطه‌ی P به طول $\frac{۱}{۳}$ روی دایره‌ی مثلثاتی و در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی قرار دارد. اگر θ زاویه‌ی بین نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ باشد، حاصل $\text{Cos}\,\theta + \text{tg}^{۲}\theta$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱ ۱/۲۵ نمره



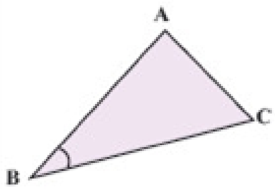
$$P(x,y)\,,\; x = \tfrac{۱}{۳}\,,\; y < ۰$$

$$x^{۲} + y^{۲} = ۱ \Rightarrow \tfrac{۱}{۹} + y^{۲} = ۱ \Rightarrow y^{۲} = \tfrac{۸}{۹} \Rightarrow y = \frac{\pm ۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\xrightarrow{y<۰} y = -\tfrac{۲\sqrt{۲}}{۳} \Rightarrow \text{Cos}\,\theta = x = \tfrac{۱}{۳}\,,\, \text{tg}\,\theta = \tfrac{y}{x} = -۲\sqrt{۲}$$

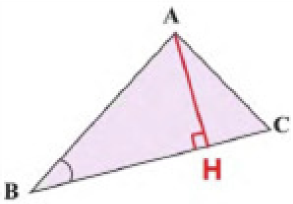
$$\Rightarrow \text{Cos}\,\theta + \text{tg}^{۲}\theta = \frac{۱}{۳} + ۸ = \frac{۲۵}{۳}$$

۴۷ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه‌ی زاویه‌ی بین آن‌ها نشان دهید:



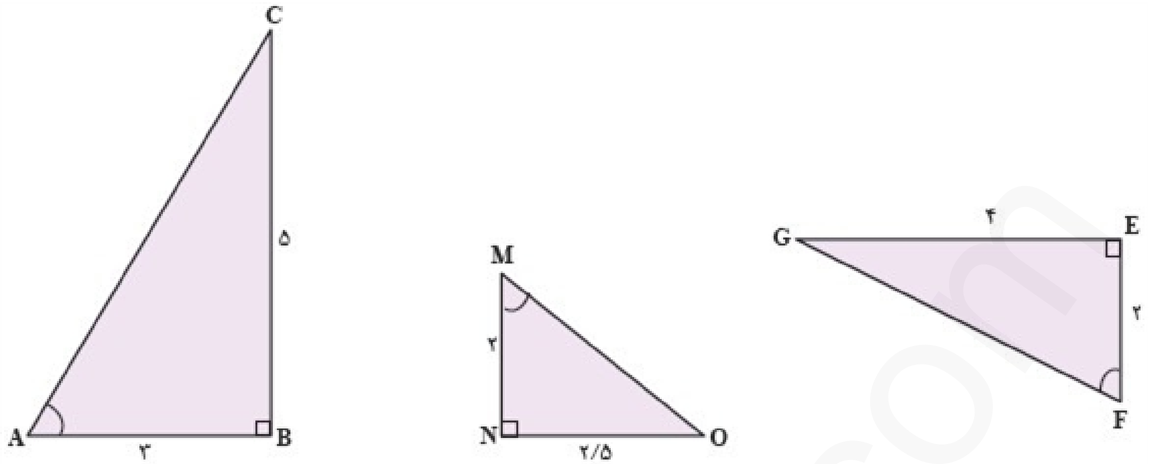
$$\overset{\triangle}{ABC} \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲} \times \text{AB} \times \text{BC} \times \text{Sin}\, B.$$

پاسخ: ۱



$$\left.\begin{array}{l} S = \tfrac{۱}{۲}\text{BC} \times \text{AH} \\ \text{Sin}\, B = \frac{\text{AH}}{\text{AB}} \Rightarrow \text{AH} = \text{AB} \times \text{Sin}\, B \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}\text{BC} \times \text{AB} \times \text{Sin}\, B$$

۴۸ در هریک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$\text{tg}\,A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$ $\quad$ $\text{Cotg}\,M = \frac{MN}{NO} = \frac{}{۲/۵}$ $\quad$ $\text{tg}\,F = \cdot = \cdot$

$\text{Cotg}\,A = \cdot = \cdot$ $\quad$ $\text{tg}\,M = \cdot = \cdot$ $\quad$ $\text{Cotg}\,F = \cdot = \cdot$

پاسخ: ۱

$\text{tg}\,A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$ $\quad$ $\text{Cotg}\,M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲/۵}$ $\quad$ $\text{tg}\,F = \frac{GE}{EF} = \frac{۴}{۲}$

$\text{Cotg}\,A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$ $\quad$ $\text{tg}\,M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲/۵}{۲}$ $\quad$ $\text{Cotg}\,F = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$

۴۹ اگر α یک زاویه‌ی دلخواه باشد، حداکثر و حداقل هریک از عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\frac{۲\,\text{Sin}\,\alpha - ۱}{۵}$ $\qquad$ ب) $۲\,\text{Cos}^۲\alpha + ۳$

پاسخ: ۱ می‌دانیم که $-۱ \le \text{Sin}\,\alpha \le ۱$ و $-۱ \le \text{Cos}\,\alpha \le ۱$ است، بنابراین با استفاده از آن‌چه می‌دانیم عبارات را می‌سازیم.

الف) $-۱ \le \text{Sin}\,\alpha \le ۱ \xrightarrow{\times ۲} -۲ \le ۲\,\text{Sin}\,\alpha \le ۲ \xrightarrow{-۱} -۳ \le ۲\,\text{Sin}\,\alpha \le ۱$

$\xrightarrow{\div ۵} -\frac{۳}{۵} \le \frac{۲\,\text{Sin}\,\alpha - ۱}{۵} \le \frac{۱}{۵}$

کم ترین مقدار $\qquad$ بیش ترین مقدار

ب) $-۱ \le \text{Cos}\,\alpha \le ۱ \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم ۲}} ۰ \le \text{Cos}^۲\alpha \le ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰ \le ۲\,\text{Cos}^۲\alpha \le ۲$

$\xrightarrow{+۳} ۳ \le ۲\,\text{Cos}^۲\alpha + ۳ \le ۵$

کم ترین مقدار $\qquad$ بیش ترین مقدار

۵۰ حاصل عبارت $\frac{۲\,\text{tg}\,۴۵^\circ + ۸\,\text{Sin}^۲ ۳۰^\circ}{\text{Cotg}^۲ ۳۰^\circ + ۸\,\text{Cos}\,۶۰^\circ}$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱ ۱ نمره

$$\frac{۲\,\text{tg}\,۴۵^\circ + ۸\,\text{Sin}^۲ ۳۰^\circ}{\text{Cotg}^۲ ۳۰^\circ + ۸\,\text{Cos}\,۶۰^\circ} = \frac{۲(۱) + ۸\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲}{(\sqrt{۳})^۲ + ۸\left(\frac{۱}{۲}\right)} = \frac{۲+۲}{۳+۴} = \frac{۴}{۷}$$