

رایگان

# شب امتحان

## فیزیک دهم

ویدیوهای  
شب امتحان

رپیتنج

دانلود جزوات  
شب امتحان

موسسه تخصصی یادگیری

## درس نامهٔ توپ برای شب امتحان

مدرس ریاضی ریپتیج

علی داودوندی

رتبه ۶۱ کنکور ریاضی

پایه دهم

فصل ۳: توان گویا و عبارت‌های جبری

فصل ۳: توان گویا و عبارت‌های جبری

ریشه و توان

بچه‌های عزیز چون مطالب درس اول و درس دوم این فصل، اشتراکات زیادی دارند، آن‌ها را با هم بررسی می‌کنیم و سپس به سراغ توان‌های گویا می‌رویم. اگر  $n$  عددی طبیعی و  $n \geq 2$  باشد، دو حالت زیر را خواهیم داشت:

اگر $n$ زوج باشد	$b^n = a \Leftrightarrow b = \pm \sqrt[n]{a}$
اگر $n$ فرد باشد	$b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$

در ردیف اول جدول، به اعداد  $\pm \sqrt[n]{a}$  ریشه‌های  $n$ ام عدد  $a$  می‌گوییم. در این حالت  $a$  نمی‌تواند منفی باشد؛ مثلاً:

$$\text{اگر } x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{3}$$

در ردیف دوم جدول، به عدد  $\sqrt[n]{a}$  ریشه‌ی  $n$ ام عدد  $a$  می‌گوییم. در این حالت  $a$  می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواهی باشد؛ مثلاً:

$$\text{اگر } x^5 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2}$$

مثال: حجم مکعبی  $125^4$  واحد است، طول ضلع این مکعب چقدر است؟ (مشابه کار در کلاس صفحه ۴۸)  
حل: اگر ضلع مکعب را  $x$  فرض کنیم، خواهیم نوشت:

$$x^3 = 125^4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{125^4} = \sqrt[3]{(5^3)^4} = \sqrt[3]{5^{12}} = 5^4 = 625$$

## چند خاصیت مهم از رادیکال‌ها

(۱) اگر  $n$  عددی طبیعی،  $n \geq 2$  بوده و  $\sqrt[n]{a}$  بامعنی باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a \xrightarrow{\text{مثال}} (\sqrt[4]{5})^4 = 5$$

(۲) اگر  $n$  عددی طبیعی فرد و بزرگ‌تر از ۲ باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[5]{(-8)^5} = -8$$

(۳) اگر  $n$  عددی طبیعی زوج و بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2$$

(۴) اگر  $n$  یک عدد طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی ۲ و هم‌چنین  $\sqrt[n]{a}$  و  $\sqrt[n]{b}$  با معنی باشند، آن‌گاه:

الف)  $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$

ب)  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$  ( $b \neq 0$ )

(۵) اگر  $\sqrt[n]{a}$  بامعنی باشد، برای هر عدد طبیعی  $m$  داریم:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

اثبات:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{\text{بار } m}} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{\text{بار } (m-1)}} \\ &= \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{\text{بار } (m-2)}} \dots = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{a}}_{\text{بار } m} = (\sqrt[n]{a})^m \end{aligned}$$

(۶) اگر  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی ۲ و رادیکال‌ها بامعنی باشند، آن‌گاه:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

اثبات:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[mn]{a}$$

۷) اگر بخواهیم ضریب رادیکال را به داخل رادیکال ببریم باید آن را به توان فرجه رادیکال برسانیم. البته اگر فرجه زوج و ضریب رادیکال، منفی باشد علامت منفی، پشت رادیکال باقی می ماند.

مثال:

$$5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{75} \quad , \quad -2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{(2^4 \times 3)} = -\sqrt[4]{48}$$

۸) در عبارتهای رادیکالی می توانیم در صورت امکان فرجه و توان زیر رادیکال را با هم ساده کنیم:

$$(n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 2) : \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (اگر } k \text{ فرد باشد.)} \\ \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{|a|^m} \text{ (اگر } k \text{ زوج باشد.)} \end{cases}$$

مثال ۱:

$$\sqrt[4]{(-5)^4} = \sqrt[4]{|-5|^4} = \sqrt[4]{5^4}$$

به این علت از قدرمطلق استفاده کردیم که ۱۲ و ۴ را به عدد ۴ که زوج است، ساده کرده ایم.

مثال ۲:

$$-\sqrt[5]{x^2 \sqrt{x}} = -\sqrt[5]{\sqrt{(x^2)^2 x}} = -\sqrt[5]{x^5} = -\sqrt{x}$$

توانهای گویا

اگر  $n$  عددی طبیعی،  $n \geq 2$  و  $a$  عددی مثبت باشد، آن گاه:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \xrightarrow{\text{مثال}} 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

به همین ترتیب اگر  $a > 0$  باشد، برای هر دو عدد طبیعی  $m$  و  $n$  توان کسری و غیر صحیح  $\frac{m}{n}$  را برای  $a$

چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \xrightarrow{\text{مثال}} 7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2}$$

اگر  $r$  و  $s$  دو عدد گویا باشند، و هم چنین  $a > 0$  و  $b > 0$ ، آن گاه:

الف)  $a^r \times a^s = a^{r+s}$

ب)  $(a^r)^s = a^{rs}$

پ)  $(ab)^r = a^r \times b^r$

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی ریپتیج

با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

مثال: عبارتهای زیر را به صورت رادیکالی نمایش دهید و جواب را تا حد امکان ساده کنید.

الف)  $2^{\frac{5}{3}}$

ب)  $6^{\frac{1}{2}}$

پ)  $(\sqrt{2})^{\frac{4}{5}}$

حل:

$$\text{الف) } 2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^2} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\text{ب) } 6^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

گویا می‌کنیم

$$\text{پ) } (\sqrt{2})^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(\sqrt{2})^4} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$$

مثال: اگر  $a > 0$  باشد، به ازای هر دو عدد گویای غیر صحیح  $r$  و  $s$  درستی تساوی  $(a^r)^s = a^{rs}$  را یک بار در

حالت کلی و بار دیگر به ازای  $r = \frac{1}{5}$  و  $s = \frac{2}{3}$  اثبات کنید. (مشابه فعالیت ۳ صفحه ۶۲)

حل: برای اثبات در حالت کلی، فرض می‌کنیم  $r = \frac{m}{n}$  و  $s = \frac{p}{q}$  (م و p دو عدد صحیح و n و q دو عدد

طبیعی بزرگ‌تر از ۱ هستند) در این صورت:

$$\begin{aligned} (a^r)^s &= (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[n]{a^m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} \\ &= \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = a^{r \cdot s} \end{aligned}$$

حال یک بار دیگر با فرض  $r = \frac{1}{5}$  و  $s = \frac{2}{3}$  خواهیم نوشت:

$$(a^{\frac{1}{5}})^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[5]{a})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt[5]{a})^2} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[15]{a^2} = a^{\frac{2}{15}} = a^{\frac{1}{5} \times \frac{2}{3}}$$

مقایسه اعداد توان دار

برای این منظور حالت‌های مختلفی وجود دارد که نیازی به ذکر همه آنها نیست؛ چون بسیاری از حالت‌ها را با آوردن یک مثال فرضی، به راحتی می‌توان بررسی کرد و نیاز به قاعده ندارند. دقت کنید اگر  $a > 1$  باشد هر چقدر توان  $a$  بزرگ‌تر شود، عدد حاصل هم بزرگ‌تر می‌شود ولی اگر  $0 < a < 1$  باشد، هر چقدر توان  $a$  بیشتر شود، جواب کوچک‌تر می‌شود. مثلاً:

$$3^{81} > 3^{70} \quad , \quad (0/5)^{36} < (0/5)^{21}$$

مثال: اعداد هر قسمت را با هم مقایسه کنید. (مشابه تمرین ۸ صفحه ۵۳)

الف)  $(-0/3)^8 \circ (-0/3)^{10}$       ب)  $\sqrt[3]{5} \circ \sqrt{5}$

پ)  $(-2)^{51} \circ (-2)^{31}$       ت)  $(-0/1)^9 \circ (-0/1)^7$

حل: الف) اولاً توان‌ها زوج‌اند پس منفی‌ها حذف می‌شوند، ثانیاً  $0 < 0/3 < 1$  است؛ لذا  $(0/3)^8 > (0/3)^{10}$  خواهد بود.

ب) ابتدا رادیکال‌ها را به توان کسری تبدیل می‌کنیم:  $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$  و  $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$  چون  $5 > 1$  است. هر چقدر توانش

بزرگ‌تر باشد، جوابش هم بزرگ‌تر می‌شود، پس چون  $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$  لذا خواهیم داشت:  $5^{\frac{1}{3}} > 5^{\frac{1}{2}}$

پ) توان‌ها فردند پس منفی‌ها باقی می‌مانند، می‌دانیم  $2^{51} > 2^{31}$  ولی دو عدد مورد نظر منفی‌اند؛ لذا می‌توان گفت:  $-2^{51} < -2^{31}$

ت) باز هم منفی‌ها باقی می‌مانند. می‌دانیم  $(0/1)^9 > (0/1)^7$  است؛ لذا:  $-(0/1)^9 < -(0/1)^7$

### عبارت‌های جبری (اتحاد و تجزیه)

در سال گذشته، اتحادهای زیر را خوانده‌اید:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad , \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

امسال هم با این اتحادها آشنا خواهید شد: **تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی ریپتیج**

با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

$$\text{اتحادهای مکعب ۲ جمله‌ای} \begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

$$\text{اتحادهای چاق و لاغر} \begin{cases} (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \end{cases}$$

$$\text{اتحادهای کمکی (فرعی)} \begin{cases} a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab \\ a^3 + b^3 = (a-b)^3 + 3ab \end{cases}$$

مثال: عبارتهای زیر را تجزیه کنید. (مشابه تمرین صفحه ۶۵)

الف)  $3x^3 - x - 4$

ب)  $\frac{x^3}{125} - 1$

پ)  $x^6 + y^6$

ت)  $a^6 - 1 \cdot ab + a^3b - 1 \cdot a^3$

حل:

$$\text{الف) } A = 3x^3 - x - 4 \xrightarrow{\times 3} 3A = \underbrace{(3x)^3 - 1(3x) - 12}_{\text{اتحاد جمله مشترک}}$$

$$\Rightarrow 3A = (3x - 4)(3x + 4) \Rightarrow A = (3x - 4)(x + 1)$$

$$\Rightarrow A = (3x - 4)(x + 1)$$

$$\text{ب) } \frac{x^3}{125} - 1 = \left(\frac{x}{5}\right)^3 - 1^3 = \left(\frac{x}{5} - 1\right) \left[ \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)(1) + 1^2 \right]$$

$$= \left(\frac{x}{5} - 1\right) \left(\frac{x^2}{25} + \frac{x}{5} + 1\right)$$

$$\text{پ) } x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)((x^2)^2 - x^2y^2 + (y^2)^2)$$

$$= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

$$\text{ت) } a^6 - 1 \cdot ab + a^3b - 1 \cdot a^3 = \underbrace{(a^6 + a^3b)}_{\text{فاکتور از } a^3} - \underbrace{1 \cdot ab - 1 \cdot a^3}_{\text{فاکتور از } -1 \cdot a}$$

$$= \underbrace{a^3(a+b)}_{\text{فاکتور از } (a+b)} - \underbrace{1 \cdot a(b+a)}_{\text{فاکتور از } a} = (a+b)(a^3 - 1 \cdot a)$$

$$= (a+b)a(\underbrace{a^2-1}_\text{اتحاد مزدوج}) = (a+b)a(a-\sqrt{1})(a+\sqrt{1})$$

### کوچک ترین مضرب مشترک

برای پیدا کردن ک.م.م (کوچک ترین مخرج مشترک هم می گوئیم.) چند عبارت جبری، ابتدا آن ها را تا حد امکان تجزیه کرده، سپس عوامل مشترک با توان بزرگ تر را در عوامل غیرمشترک ضرب می کنیم.

مثال: ک.م.م دو عبارت  $a^4 + 2a^3 - 3a^2$  و  $a^3 + 8a^2 + 15a$  را به دست آورید.

حل:

$$a^4 + 2a^3 - 3a^2 = a^2(a^2 + 2a - 3) = a^2(a+3)(a-1)$$

$$a^3 + 8a^2 + 15a = a(a^2 + 8a + 15) = a(a+5)(a+3)$$

$$\Rightarrow \text{ک.م.م} = \underbrace{a^2(a+3)}_{\substack{\text{عوامل مشترک} \\ \text{با توان بیشتر}}} \cdot \underbrace{(a-1)(a+5)}_{\text{عوامل غیرمشترک}}$$

### عبارت های گویا

به عبارتی کسری گویا می گوئیم که صورت و مخرج آن، هر دو چند جمله ای باشند، پس عباراتی مثل

$$\frac{5x - \sqrt{2}}{x^3} \text{ و } \frac{1}{x} \text{ گویا هستند ولی } \sqrt{x} - 1, \frac{\sqrt{x+3x}}{2x-3}, \frac{|x+4|}{x^2} \text{ گویا نیستند. یک عبارت گویا به ازای}$$

ریشه یا ریشه های مخرجش، تعریف نشده است.

مثال: عبارت گویای  $\frac{1}{x^2-1} + \frac{3}{x^2+9} - \frac{1}{x^2}$  به ازای چه مقادیری از  $x$  تعریف نشده است؟ (مقدار ندارد.)

(مشابه فعالیت ۵ صفحه ۶۶)

حل:

$$= 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ \text{جواب ندارد} \\ x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$



ساده کردن عبارتهای گویا: ابتدا صورت و مخرج را تا حد امکان ساده کرده سپس عامل یا عوامل مشترک را از آنها ساده می‌کنیم:

مثال:

$$\frac{y^y - y}{(y-1)(y^y + y^y + 1)} = \frac{y(y^y - 1)}{(y-1)(y^y + y^y + 1)}$$

$$= \frac{y(y^y - 1)(\cancel{y^y + y^y + 1})}{(y-1)(\cancel{y^y + y^y + 1})} = \frac{y(y^y - 1)(y+1)}{y-1} = y(y+1)$$

جمع و تفریق عبارتهای گویا: برای این منظور ابتدا تمام کسرها را در صورت امکان، مستقلاً ساده می‌کنیم سپس به کمک ک.م.م مخرجها، مخرج مشترک می‌گیریم:

مثال:

$$\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{1 - (1+x)(x-2) + x(x+2)}{x(x-2)}$$

$$= \frac{3x+3}{x(x-2)} = \frac{3(x+1)}{x(x-2)}$$

گویا کردن: اگر در مخرج یک عبارت گویا عبارتهایی شبیه  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ،  $a \pm \sqrt{b}$  و  $\sqrt{a} \pm b$  و یا مشابه همین رادیکالها با فرجه زوج بزرگتر از ۲ باشد، کافی است صورت و مخرج را در مزدوج ضرب کنیم (گاهی لازم است چند بار این کار را تکرار کنیم تا رادیکال مخرج، حذف شود). ولی اگر فرجه رادیکال فرد باشد از اتحادهای چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

مثال: مخرج کسرهایی زیر را گویا کنید و حاصل قسمت (ت) را به دست آورید. (مشابه تمرین ۲ صفحه ۶۷)

الف)  $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

ب)  $\frac{1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

پ)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$

ت)  $\frac{5}{\sqrt{x-6}} + \frac{3}{\sqrt{x+6}} - \frac{x-1}{x-36}$

$$\text{عبارت (الف)} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$$

$$\text{عبارت (ب)} = \frac{1}{\sqrt[4]{x} - 1} \times \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt[4]{x} + 1} = \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{\underbrace{(\sqrt[4]{x})^2 - 1^2}_{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$$

(پ) همیشه وقتی فرجه فرد است، منخرج را معادل جمله  $a + b$  یا  $a - b$  در اتحادهای

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad \text{یا} \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

لاغر                      چاق                      لاغر                      چاق

منخرج را در پرانتزهای چاق ضرب می‌کنیم.

$$\text{عبارت} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \times \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

اتحاد چاق و لاغر

$$\frac{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{xy} + (\sqrt[3]{y})^2}{(\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{xy} + (\sqrt[3]{y})^2}{x + y}$$

$$\text{عبارت (ت)} = \left( \frac{5}{\sqrt{x} - 6} \times \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 6} \right) + \left( \frac{3}{\sqrt{x} + 6} \times \frac{\sqrt{x} - 6}{\sqrt{x} - 6} \right) - \frac{x - 1}{x - 36}$$

$$= \frac{5\sqrt{x} + 30}{x - 36} + \frac{3\sqrt{x} - 18}{x - 36} - \frac{x - 1}{x - 36}$$

$$= \frac{5\sqrt{x} + 30 + 3\sqrt{x} - 18 - x + 1}{x - 36} = \frac{8\sqrt{x} - x + 13}{x - 36}$$

در جاهای خالی یکی از علامت‌های «>»، «<» یا «=» را قرار دهید.

۱

$$\begin{aligned} (-0.1)^5 &\bigcirc (-0.1)^3 \\ (-2)^5 &\bigcirc (-2)^3 \end{aligned}$$

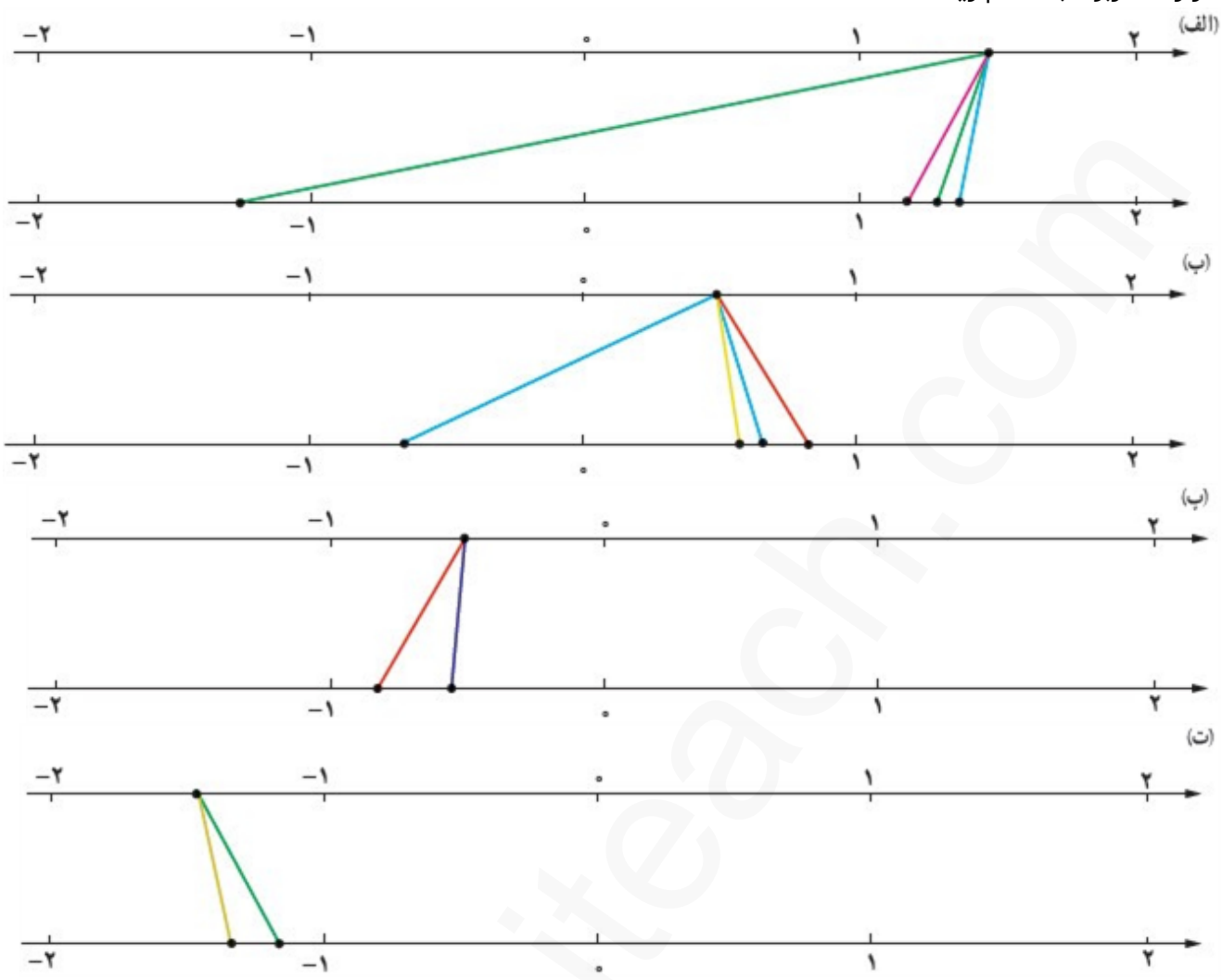
$$\begin{aligned} (0.1)^5 &\bigcirc (0.1)^3 \\ \sqrt[5]{0.00001} &\bigcirc 0.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-0.1)^5 &> (-0.1)^3 \\ (-2)^5 &< (-2)^3 \end{aligned}$$

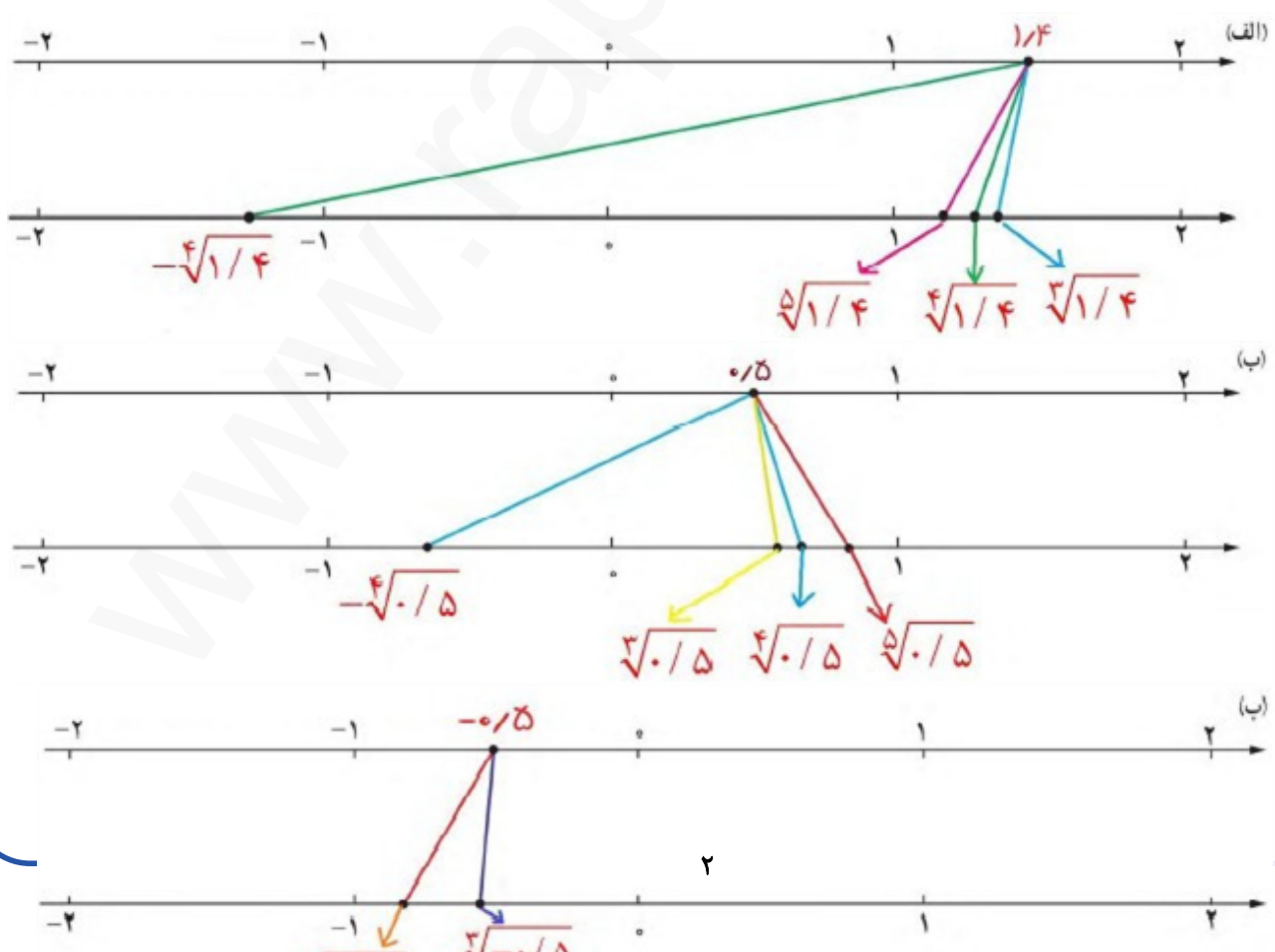
$$\begin{aligned} (0.1)^5 &< (0.1)^3 \\ \sqrt[5]{0.00001} &= 0.1 \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

در هریک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.



پاسخ: ۱

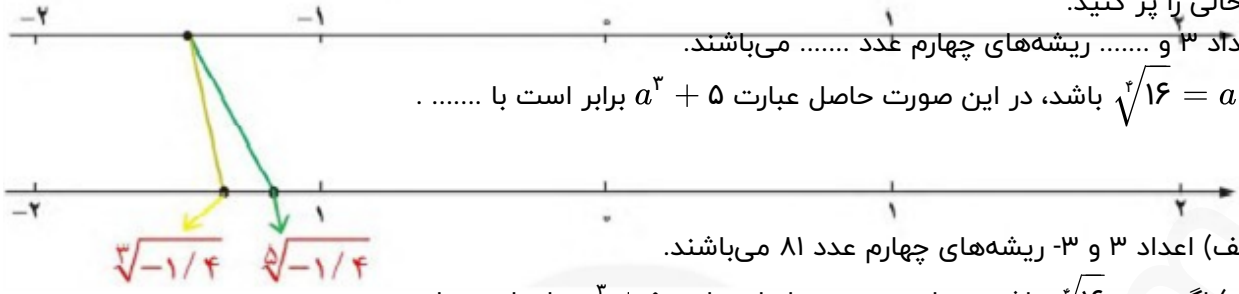


۳

جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و ..... ریشه‌های چهارم عدد ..... می‌باشند.

ب) اگر  $\sqrt[4]{16} = a$  باشد، در این صورت حاصل عبارت  $a^3 + 5$  برابر است با .....



پاسخ: ۱

الف) اعداد ۳ و -۳ ریشه‌های چهارم عدد ۸۱ می‌باشند.

ب) اگر  $\sqrt[4]{16} = a$  باشد، در این صورت حاصل عبارت  $a^3 + 5$  برابر است با:

$$a = 2 \Rightarrow a^3 + 5 = 8 + 5 = 13$$

۴

محاسبه کنید.

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} =$$

$$\sqrt[5]{-0. / \dots 32} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} =$$

پاسخ: ۱

$$\sqrt[5]{\frac{1}{100000}} = \frac{1}{10}$$

$$\sqrt[5]{-0. / \dots 32} = -0. / 2$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

۵

جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲		-۲۴۳			
ریشه پنجم	-۲	۵		-۱	-۱۰	

پاسخ: ۱

عدد	-۳۲	۳۱۲۵	-۲۴۳	-۱	-۱۰۰۰۰۰	۱۰۲۴
ریشه پنجم	-۲	۵	-۳	-۱	-۱۰	۴

زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف)  $4 < \sqrt{\quad} < 5$       ب)  $9 < \sqrt{\quad} < 10$

زیر رادیکال می‌توان تمام اعداد بزرگ‌تر از ۱۶ و کوچک‌تر از ۲۵ را نوشت.

پاسخ: ۱ الف)  $4 < \sqrt{\quad} < 5$   
 به توان ۲  
 $16 < \quad < 25$

زیر رادیکال می‌توان تمام اعداد بزرگ‌تر از ۷۲۹ و کوچک‌تر از ۱۰۰۰ را نوشت.

ب)  $9 < \sqrt{\quad} < 10$   
 به توان ۳  
 $729 < \quad < 1000$

۲ ساده کنید.

۱)  $\sqrt{a^2 - 4a + 4}$       ( $a < 2$ )

۲)  $\sqrt{x^2 + 6x + 9}$       ( $x > -3$ )

۱)  $\sqrt{a^2 - 4a + 4} = \sqrt{(a - 2)^2} = \overset{\ominus}{|a - 2|} = -a + 2$

پاسخ: ۱

۲)  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x + 3)^2} = \overset{\oplus}{|x + 3|} = x + 3$

۸ ساده کنید.

۱)  $\sqrt{8} + 3\sqrt{125} + \sqrt{20} - \sqrt{200}$

۲)  $2\sqrt{9} + \sqrt{3} + 2\sqrt{12} + 5$

۱)  $\sqrt{8} + 3\sqrt{125} + \sqrt{20} - \sqrt{200} = \sqrt{4 \times 2} + 3\sqrt{25 \times 5} + \sqrt{4 \times 5} - \sqrt{100 \times 2}$   
 $= 2\sqrt{2} + 15\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 10\sqrt{2} = 17\sqrt{5} - 8\sqrt{2}$

پاسخ: ۱

۲)  $2\sqrt{9} + \sqrt{3} + 2\sqrt{12} + 5 = 2 \times 3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{4 \times 3} + 5 = 6 + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 5$   
 $= 11 + 5\sqrt{3}$

$\sqrt{72c^9d^6}$

۹ ساده کنید.

$\sqrt{72c^9d^6} = \sqrt{6^2 \times 2 \times (c^3)^2 \times c \times (d^3)^2} = 6c^3 |d^3| \sqrt{2c}; (c \geq 0)$

پاسخ: ۱

$$(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2$$

۱۰ عبارت مقابل را ساده کنید:

$$\begin{aligned} (5\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 &= (5\sqrt{2})^2 - 2(5\sqrt{2})(2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})^2 \\ &= 50 - 20\sqrt{6} + 12 = 62 - 20\sqrt{6} \end{aligned}$$

۱ پاسخ:

$$\frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} \times \frac{3 - 2\sqrt{5}}{2}$$

۱۱ عبارت مقابل را ساده کنید:

$$\frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} \times \frac{3 - 2\sqrt{5}}{2} = \frac{(3 + 2\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})}{2 \times 2} = \frac{9 - 4 \times 5}{4} = \frac{-11}{4}$$

۱ پاسخ:

۱۲ ریشه‌ی دوم عداد مقابل را تعیین کنید: ۶۴

$$x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$$

۱ پاسخ:

۱۳ حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف)  $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$

ب)  $\sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{20} + \sqrt{125} - 2\sqrt[3]{81}$

الف)  $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$

$$|\sqrt{3} + \sqrt{2}| + |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

ب)  $\sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{20} + \sqrt{125} - 2\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{8 \times 3} + 2\sqrt[3]{4 \times 5} + \sqrt{25 \times 5} - 2\sqrt[3]{27 \times 3}$   
 $= 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{5} + 5\sqrt{5} - 6\sqrt[3]{3} = 9\sqrt{5} - 4\sqrt[3]{3}$

۱ پاسخ:

۱۴ مقایسه کنید و در مربع از علامت‌های < > = استفاده کنید.

الف)  $\sqrt[3]{12} \square \sqrt{12}$

ب)  $\sqrt[3]{-0.5} \square \sqrt[5]{-0.5}$

الف)  $\sqrt[3]{12} < \sqrt{12}$

ب)  $\sqrt[3]{-0.5} > \sqrt[5]{-0.5}$

۱ پاسخ:

الف) رادیکال‌های زیر را ساده کنید.

$$\sqrt[5]{96} \quad (۲) \quad \sqrt[3]{24} \quad (۱)$$

ب) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$2\sqrt{12} + 3\sqrt{44} - 2\sqrt{27} + 5\sqrt{99}$$

پاسخ: ۱ الف)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} & (۱) \\ \sqrt[5]{96} &= \sqrt[5]{32 \times 3} = \sqrt[5]{2^5 \times 3} = 2\sqrt[5]{3} & (۲) \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{4 \times 3} + 3\sqrt{4 \times 11} - 2\sqrt{9 \times 3} + 5\sqrt{9 \times 11} &= 4\sqrt{3} + 6\sqrt{11} - 6\sqrt{3} + 15\sqrt{11} \\ &= -2\sqrt{3} + 21\sqrt{11} \end{aligned}$$

$$(۱۵)^{\frac{1}{2}}$$

۱۶) حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\text{ب) } 11^{\frac{2}{5}} \times 6^{\frac{2}{5}}$$

$$\text{پ) } 4^{\frac{2}{3}} \div 4^{\frac{1}{3}}$$

پاسخ: ۱

$$\text{الف) } 15^{\frac{2}{3}} = 15^2$$

$$\text{ب) } 66^{\frac{2}{5}}$$

$$\text{پ) } 4^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} \quad (\text{ص ۹۳})$$

۱۷) جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید.

الف) ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر ..... است.

ب) ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ برابر ..... و ..... است.

پ) ریشه سوم عدد ۲۷ برابر ..... است.

پاسخ: ۱ الف) ۲

ب) ۲ و -۲

پ) ۳

(ص ۸۸)



به جای  $a$  و  $b$  و عدد طبیعی  $n$  عددهایی قرار دهید، به طوری که:

الف) تساوی  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  برقرار باشد.

ب) تساوی  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  برقرار نباشد.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$$

پاسخ: ۱

ب)  $\sqrt[3]{\frac{-16}{-81}} = \sqrt[3]{\left(\frac{-2}{-3}\right)^3} = \frac{2}{3}$  است در حالی که  $\frac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{-81}}$  تعریف نشده است.

آیا تساوی  $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$  برقرار است؟  $n$  را برابر ۳، ۴ یا ۵ بگیرید و به جای  $a$  و  $b$  مقدارهای عددی بدهید.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{8} = 1 + 2 = 3 \\ \sqrt[3]{1+8} = \sqrt[3]{9} \approx 2.08 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{8} \neq \sqrt[3]{1+8}$$

پاسخ: ۱

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{81} = 1 + 3 = 4 \\ \sqrt[4]{1+81} = \sqrt[4]{82} \approx 3.009 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{81} \neq \sqrt[4]{1+81}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[5]{-1} + \sqrt[5]{-32} = -1 + (-2) = -3 \\ \sqrt[5]{-1+(-32)} = \sqrt[5]{-33} \approx -2.01 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt[5]{-1} + \sqrt[5]{-32} \neq \sqrt[5]{-1+(-32)}$$

۲۰ حاصل ضربهای زیر را به دست آورید.

الف)  $\sqrt[3]{6-2\sqrt{7}} \times \sqrt[3]{6+2\sqrt{7}}$

ب)  $\sqrt[3]{\sqrt{3}+1} \times \sqrt[3]{4-2\sqrt{3}}$

الف)  $\sqrt[3]{6-2\sqrt{7}} \times \sqrt[3]{6+2\sqrt{7}} = \sqrt[3]{(6-2\sqrt{7})(6+2\sqrt{7})} = \sqrt[3]{36-28}$

$= \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

ب)  $\sqrt[3]{\sqrt{3}+1} \times \sqrt[3]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^2} \times \sqrt[3]{4-2\sqrt{3}}$

$= \sqrt[3]{4+2\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{4-2\sqrt{3}} = \sqrt[3]{16-12} = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

پاسخ: ۱

حاصل عبارات زیر را بیابید.

۲۱

$$\sqrt[4]{\frac{1}{256}} + 5\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \text{ (ب)}$$

$$\sqrt[2]{-1000} - \sqrt[3]{128} \text{ (الف)}$$

$$\text{الف) } \sqrt[2]{(-10)^3} - \sqrt[3]{2^7} = -10 - 2 = -12$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} + 5\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

عبارات زیر را با یک رادیکال و به صورت ساده شده بنویسید.

۲۲

$$\text{الف) } \sqrt[2]{2\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{-\sqrt{3}\sqrt[4]{5}}$$

$$\text{الف) } \sqrt[22]{2^6 \times 2^2 \times 3} = \sqrt[22]{2^{10} \times 3} = \sqrt[22]{3 \cdot 72}$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } -\sqrt[22]{3^2 \times 5} = -\sqrt[22]{4 \cdot 5}$$

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

۲۳

$$\text{الف) } \sqrt[2]{3} \times \sqrt[2]{27}$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{(-3)^{15} \cdot (-3)^9}$$

$$\text{ج) } \sqrt[6]{\frac{3^{18}}{5^{12}}}$$

$$\text{الف) } \sqrt[2]{3} \times \sqrt[2]{3^3} = \sqrt[2]{3^4} = 3$$

پاسخ: ۱

$$\text{ب) } \sqrt[3]{(-3)^{15} \cdot (-3)^9} = \sqrt[3]{(-3)^{24}} = |-3|^8 = 27$$

$$\text{ج) } \sqrt[6]{\frac{3^{18}}{5^{12}}} = \frac{3^3}{5^2} = \frac{27}{25}$$

هر یک از عبارتهای زیر را به شکل رادیکالی نوشته و در صورت امکان حاصل آن را به دست آورید.

الف)  $16^{-\frac{2}{4}}$

ب)  $25^{\frac{2}{2}}$

ج)  $27^{\frac{2}{2}}$

د)  $125^{\frac{2}{2}}$

الف)  $16^{-\frac{2}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2^4}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

پاسخ: ۱

ب)  $25^{\frac{2}{2}} = \sqrt{25^2} = \sqrt{(5^2)^2} = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$

ج)  $27^{\frac{2}{2}} = \sqrt{27^2} = \sqrt{(3^3)^2} = \sqrt{3^6} = 3^3 = 27$

د)  $125^{\frac{2}{2}} = \sqrt{125^2} = \sqrt{(5^3)^2} = \sqrt{5^6} = 5^3 = 125$

عبارتهای زیر را با توان گویای مثبت بنویسید.

ب)  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \times 16^{\frac{1}{2}}$

الف)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{6}}$

الف)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{2^3}{3^3} \times \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$

پاسخ: ۱

ب)  $\frac{1}{2 \times 2^{\frac{1}{2}}} \times (2^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

الف)  $\left(\frac{1}{128}\right)^{-2} \circ \left(\frac{1}{8}\right)^{-9}$

ب)  $(324^2)^{\frac{2}{3}} \circ (\sqrt{162})^3$

ج)  $\left(\frac{4}{v}\right)^{\frac{v}{2}} \circ \left(\frac{v}{4}\right)^{\frac{2}{v}}$

پاسخ: ۱ الف

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{128}\right)^{-2} &= (2^{-7})^{-2} = 2^{14} \\ \left(\frac{1}{8}\right)^{-9} &= (2^{-3})^{-9} = 2^{27} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{128}\right)^{-2} > \left(\frac{1}{8}\right)^{-9}$$

ب)

$$324 = 18^2 \Rightarrow (324^2)^{\frac{2}{3}} = (18^4)^{\frac{2}{3}} = 18^{\frac{8}{3}} = 18^{\frac{2}{3}} \times 18^{\frac{2}{3}}$$

$$162 = 9 \times 18 \Rightarrow (\sqrt{162})^3 = 18^{\frac{3}{2}} \times 9^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow ((324)^2)^{\frac{2}{3}} > (\sqrt{162})^3$$

$$\left(\frac{4}{v}\right)^{\frac{v}{2}}, \left(\frac{v}{4}\right)^{\frac{2}{v}} \xrightarrow{\text{به توان 28}} \left(\frac{4}{v}\right)^{14}, \left(\frac{v}{4}\right)^{16}$$

ج) ابتدا هر دو را به توان ۲۸ می‌رسانیم  $\Leftarrow$

چون مخرج مشترک  $\frac{4}{v}$  و  $\frac{v}{4}$  که توان‌ها هستند، ۲۸ می‌باشد، اعداد به دست آمده یعنی  $\left(\frac{4}{v}\right)^{14}$  و  $\left(\frac{v}{4}\right)^{16}$  را با

هم مقایسه می‌کنیم. چون  $0 < \frac{4}{v} < 1$  به توان عدد صحیح رسیده است، حاصل بسیار کوچک می‌شود ولی چون

$\frac{v}{4}$  از یک بزرگتر است و به توان صحیح رسیده است، از یک بزرگتر می‌شود. پس  $\Leftarrow$

$$\left(\frac{4}{v}\right)^{\frac{v}{2}} < \left(\frac{v}{4}\right)^{\frac{2}{v}}$$

الف)  $(x-3)(x+3)(x^2+9x^2+81)$

الف) حاصل عبارات را به کمک اتحادها بیابید.

$$\frac{10}{5 + \sqrt{15}}$$

ب) مخرج کسر مقابل را گویا کنید.

الف)  $(x-3)(x+3)(x^2+9x^2+81) = (x^2-9)(x^2+9x^2+81) = x^4-9^2 = x^4-729$

پاسخ: ۱

ب)  $\frac{10}{5 + \sqrt{15}} \times \frac{5 - \sqrt{15}}{5 - \sqrt{15}} = \frac{10(5 - \sqrt{15})}{25 - 15} = \frac{10(5 - \sqrt{15})}{10} = 5 - \sqrt{15}$

۲۸ اگر  $x + \frac{2}{x} = 7$  باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف)  $x^2 + \frac{4}{x^2}$   
 ب)  $x^2 + \frac{1}{x^2}$

الف)  $x^2 + \frac{4}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 2(x)\left(\frac{2}{x}\right) = 7^2 - 4 = 49 - 4 = 45$

پاسخ: ۱

ب)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 2(x)\left(\frac{2}{x}\right)\left(x + \frac{2}{x}\right) = 7^2 - 6(7) = 49 - 42 = 7$

۲۹ حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحادها بیابید.

الف)  $(2x - y)^2$   
 ب)  $(2x + y - 3z)(2x + y + 3z)$   
 ج)  $(5x - 3y)(25x^2 + 15xy + 9y^2)$

الف)  $(2x - y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-y) + (-y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$

پاسخ: ۱

ب)  $(2x + y - 3z)(2x + y + 3z) = (2x + y)^2 - (3z)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 - 9z^2$

ج)  $(5x - 3y)(25x^2 + 15xy + 9y^2) = 125x^3 - 27y^3$

۳۰ اگر  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 16$  ، حاصل عبارت  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7}$  را به دست آورید.

پاسخ: ۱ تساوی  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7} = 16$  را در مزدوج عبارت رایکالی یعنی  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7}$  ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-7}) = 16(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7})$$

$$\Rightarrow x+1 - x+7 = 16(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7}) \Rightarrow 8 = 16(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-7})$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = \frac{8}{16} \Rightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-7} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} &= \frac{x+2+x-2-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-4}{x^2-4} \\ &= \frac{2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x+2} \end{aligned}$$

پاسخ: ۱

۳۲ اگر  $a + b = 5$  و  $a^3 + b^3 = 100$  باشد، مقدار  $ab$  را به دست آورید.

پاسخ: ۱ روش اول:

$$\begin{aligned} a + b = 5 &\xrightarrow{\text{به توان می رسانیم}^3} (a + b)^3 = 125 \Rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 125 \\ a^3 + b^3 + 3ab(a + b) &= 125 \Rightarrow 100 + 3ab(5) = 125 \\ \Rightarrow 15ab = 25 \Rightarrow ab &= \frac{25}{15} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 100 \\ a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow 100 = 5^3 - 3ab(5) \Rightarrow 100 = 125 - 15ab$$

$$\Rightarrow 15ab = 25 \Rightarrow ab = \frac{5}{3}$$

۳۳ گویا کنید.

$$\frac{5}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\frac{5}{2 - \sqrt{3}} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 10 + 5\sqrt{3}$$

پاسخ: ۱

۳۴ الف) عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$8x^3 + 125y^3$$

ب) مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

پاسخ: ۱ الف)

$$8x^3 + 125y^3 = (2x + 5y)(4x^2 - 10xy + 25y^2)$$
$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2}}{x - y}$$

ب)

۳۵ اگر  $a + b = 5$  و  $ab = 2$  باشد،  $a^3 + b^3$  را حساب کنید.

پاسخ: ۱ روش اول:

$$a + b = 5 \xrightarrow{\text{به توان می‌رسانیم}^3} (a + b)^3 = 125$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 125 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 125$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3(2)(5) = 125 \Rightarrow a^3 + b^3 = 125 - 30 \Rightarrow a^3 + b^3 = 95$$

روش دوم: از اتحاد کمکی استفاده می‌کنیم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$a^3 + b^3 = 5^3 - 3(2)(5) = 125 - 30 = 95$$

۳۶ گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{11} - 1}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{1}{\sqrt{11} - 1} \times \frac{\sqrt{121} + \sqrt{11} + 1}{\sqrt{121} + \sqrt{11} + 1} = \frac{\sqrt{121} + \sqrt{11} + 1}{11 - 1} = \frac{\sqrt{121} + \sqrt{11} + 1}{10}$$

۳۷ جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $(3x - 1)^3 = \dots - 27x^3 + \dots - 1$

ب)  $(2x + 1)(\dots + 1) = 8x^3 + 1$

الف)  $(3x - 1)^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

ب)  $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 8x^3 + 1$

پاسخ: ۱

با استفاده از اتحادها، حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

$$\text{الف) } ۱۶ \times ۱۴ = (۱۵ + ۱)(۱۵ - ۱) = ۱۵^2 - ۱ = ۲۲۴$$

$$\text{ب) } ۱۰۵^2$$

$$\text{پ) } ۹۹۹۹^2$$

$$\text{ت) } ۱۰۵^3$$

$$۱۰۵^2 = (۱۰۰ + ۵)^2 = ۱۰۰^2 + ۲(۱۰۰)(۵) + ۵^2 = ۱۰۰۰۰ + ۱۰۰۰ + ۲۵ = ۱۱۰۲۵ \quad \text{پاسخ: ۱ ب)$$

$$۹۹۹۹^2 = (۱۰۰۰۰ - ۱)^2 = (۱۰۰۰۰)^2 - ۲(۱۰۰۰۰) + ۱ = ۹۹۹۸۰۰۰۱ \quad \text{پ)$$

$$۱۰۵^3 = (۱۰۰)^3 + ۳(۱۰۰)^2(۵) + ۳(۱۰۰)(۵)^2 + (۵)^3 = ۱۱۵۷۶۲۵ \quad \text{ت)$$

۳۹ عبارت  $۲۷a^3 - ۱$  مضرب کدامیک از عبارتهاست؟

الف)  $a - ۱$       ب)  $۳a - ۱$       پ)  $۹a^2 + ۳a + ۱$       ت)  $۳a + ۱$

۱ پاسخ: با توجه به تجزیه‌ی آن - طبق اتحاد چاق و لاغر - یعنی:  $(۳a - ۱)(۹a^2 + ۳a + ۱)$

هر دو گزینه‌ی ب و پ صحیح هستند.

نکته: عبارت  $\sqrt{۳}(a + b)$  یک مضرب  $a + b$  محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴۰ اگر  $a + b = ۱$  و  $a^2 + b^2 = ۵$  باشد،  $a^3 + b^3$  را محاسبه کنید.

$$a + b = ۱ \xrightarrow{\text{طرفین به توان دو می‌رسانیم}} (a + b)^2 = ۱ \Rightarrow a^2 + b^2 + ۲ab = ۱$$

$$\Rightarrow ۵ + ۲ab = ۱ \Rightarrow ۲ab = ۱ - ۵ \Rightarrow ۲ab = -۴ \Rightarrow ab = -۲$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = ۷$$

۱ پاسخ:



الف) مخرج کسر روبه‌رو را گویا کنید.

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

ب) اگر  $x + \frac{1}{x} = 3$  باشد، حاصل  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  را بیابید.  
پ) تجزیه کنید:  $x^3 + x^2 - 4x - 4$

پاسخ: ۱ الف)

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{x - 1}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7 \quad \text{ب)}$$

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x^2 - 4)(x + 1) \quad \text{پ)}$$

$$= (x - 2)(x + 2)(x + 1)$$

۴۲ الف) با استفاده از توان‌های گویا، حاصل عبارت  $(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}})^{48}$  را به دست آورید.

ب) عبارت  $x^6 - 1$  را تجزیه کنید.

پاسخ: ۱ الف)

$$(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}})^{48} = \left(2\sqrt[3]{3}\right)^{\frac{1}{3} \cdot 48} = (2\sqrt[3]{3})^{16} = 2^{16} \times (\sqrt[3]{3})^6$$

$$= 2^{16} \times \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 2^{16} \times 3^2$$

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) \quad \text{ب)}$$

۴۳ مخرج کسر مقابل را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 16}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 16} \times \frac{\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{\sqrt[3]{x} + 4}{x + 64}$$

الف)  $x^3 + 3x - 4$

ب)  $x^3 + 6x^2 + 12x + 7$

پاسخ: ۱

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad x^3 + 3x - 4 &= x^3 - 1 + 3x - 3 = (x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + x + 4) \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad \underbrace{x^3 + 6x^2 + 12x + 7 - 1}_{\text{اتحاد مکعب دو جمله ای}} = (x+2)^3 - 1 = (x+2-1)((x+2)^2 + (x+2) + 1)$$

$$= (x+1)(x^2 + 4x + 4 + x + 2 + 1) = (x+1)(x^2 + 5x + 7)$$

تجزیه کنید. ۴۵

۱)  $x^3 + 7x - 8$

۲)  $x^3 - x - 24$

پاسخ: ۱

$$\begin{aligned} \text{۱)} \quad x^3 + 7x - 8 &= x^3 + 7x - 1 - 7 = x^3 - 1 + 7x - 7 = (x-1)(x^2 + x + 1) + 7(x-1) \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1 + 7) = (x-1)(x^2 + x + 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{۲)} \quad x^3 - x - 24 &= x^3 - x - 27 + 3 = x^3 - 27 - x + 3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9) - (x-3) \\ &= (x-3)(x^2 + 3x + 9 - 1) = (x-3)(x^2 + 3x + 8) \end{aligned}$$

$$\text{۴۶} \quad \text{حاصل } \sqrt{3 - \sqrt{2}} \times \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} \text{ را به دست آورید و مخرج کسر } \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \text{ را گویا کنید.}$$

پاسخ: ۱ ۲ نمره

$$\begin{aligned} \sqrt{3 - \sqrt{2}} \times \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} \times \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{9 - 6\sqrt{2} + 2} \times \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{(11 - 6\sqrt{2})(11 + 6\sqrt{2})} \\ &= \sqrt{121 - 72} = \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3} + 1} &= \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 1^2}{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 1^2} = \frac{2(\sqrt{9} - \sqrt{3} + 1)}{\underbrace{(\sqrt{3})^2 + 1^2}_{3 + 1 = 4}} \\ &= \frac{\sqrt{9} - \sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

$$a = b = c$$

۴۷ اگر  $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$  نشان دهید.

۱ پاسخ: در عبارت مورد نظر، مجموع سه عبارت که مربع کامل هستند برابر با صفر شده است. می‌دانیم که عبارات مربع کامل نامنفی هستند پس هر یک از عبارات یا صفر هستند یا مثبت اگر هر یک از این عبارات نامنفی، مثبت باشند، حاصل جمع آن‌ها صفر نخواهد شد بنابراین هر سه عبارت مساوی صفر هستند پس:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \Rightarrow a = b \\ b - c = 0 \Rightarrow b = c \Rightarrow a = b = c \\ c - a = 0 \Rightarrow c = a \end{cases}$$

۴۸ عبارت مقابل را تجزیه کنید:  $(x + y)^2 + 2(x + y) - 8$

۱ پاسخ: عبارت  $(x + y)$  را جمله مشترک فرض می‌کنیم.

$$(x + y)^2 + 2(x + y) - 8 = (x + y)^2 + (4 - 2)(x + y) + (4)(-2) \\ = (x + y + 4)(x + y - 2)$$

اتحاد جمله مشترک

۴۹ عبارت مقابل را تجزیه کنید:  $x^4 + x^2y^2 - 2y^4$

$$x^4 + x^2y^2 - 2y^4 = (x^2)^2 + (2y^2 - y^2)(x^2) + (2y^2)(-y^2) \\ = (x^2 + 2y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + 2y^2)(x + y)(x - y)$$

۱ پاسخ: روش اول:

اتحاد مزدوج اتحاد جمله مشترک

روش دوم:

$$x^4 + x^2y^2 - 2y^4 = x^4 + x^2y^2 - y^4 - y^4 = (x^4 - y^4) + (x^2y^2 - y^4) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{-2y^4} \qquad \text{دسته بندی}$$

$$= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) + y^2(x^2 - y^2) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + y^2)$$

فاکتورگیری اتحاد مزدوج فاکتورگیری

$$= (x + y)(x - y)(x^2 + 2y^2)$$

اتحاد مزدوج

۱ پاسخ: جمله  $-2n^2$  را به صورت  $14n^2 - 16n^2$  می‌نویسیم.

$$= n^2 + \underbrace{14n^2 - 16n^2}_{-2n^2} + 49 = (n^2 + 14n^2 + 49) - 16n^2 = [(n^2)^2 + 2(7)(n^2) + 7^2] - (4n)^2 = (n^2 + 7)^2 - (4n)^2$$

دسته بندی تحد مربع دو جمله ای

$$= (n^2 + 7 + 4n)(n^2 + 7 - 4n)$$

اتحاد مزدوج

دکتر متین هوشیار  
مدرس شیمی رپیتچ

مهندس علی داودوندی  
مدرس ریاضی رپیتچ

مهندس شهاب نصیری  
مدرس فیزیک رپیتچ

دکتر الهه بنام  
مدرس زیست رپیتچ



# رپیتچ

سریعتر یاد بگیری...!

با اساتید رتبه برتر و رتبه پرور  
به همراه مشاورین رتبه برتر  
تو هم رتبه برتر میشی رفیق

rapiteach.com