رایگان

# شب امتحان

## فیزیک دهم

دانلود جزوات
شب امتحان

رپیتیچ

ویدیو های
شب امتحان

سریعتر یاد بگیریا

## فصل ۴: معادلات نامعادلات

### معادلهٔ درجه دوم و روش‌های حل آن

هر معادله که پس از ساده شدن به شکل $ax^۲ + bx + c = ۰$ تبدیل شود که در آن $a \neq ۰$ است، معادلهٔ درجه دوم نام دارد. حال با روش‌های حل این معادلات آشنا می‌شوید.

روش تجزیه: به کمک فاکتورگیری و یا استفاده از اتحادها، عبارت $ax^۲ + bx + c$ را به صورت حاصل ضرب دو عامل می‌نویسیم و سپس تک‌تک این عامل‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

مثال ۱:

$$\underbrace{x^۲ - ۱۵x + ۴۴}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} = ۰ \Rightarrow (x - ۱۱)(x - ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۱۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱۱ \\ x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \end{cases}$$

مثال ۲:

$$(x - ۱)^۲ = ۲۵ \Rightarrow (x - ۱)^۲ - ۲۵ = ۰ \Rightarrow \underbrace{(x - ۱)^۲ - ۵^۲}_{\text{اتحاد مزدوج}} = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۱ - ۵)(x - ۱ + ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۶ \\ x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۴ \end{cases}$$

مثال ۳:

$$(x - ۵)(x - ۷) = ۳x(x - ۷) \Rightarrow \underbrace{(x - ۵)(x - ۷) - ۳x(x - ۷)}_{\text{فاکتور از } (x-۷)} = ۰$$

$$(x-۷)(x-۵-۳x)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۷=۰\Rightarrow x=۷\\-۲x-۵=۰\Rightarrow x=-\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

**روش ریشه‌گیری (جذرگیری)**: اگر $k$ عددی نامنفی باشد، آن‌گاه:

$$x^۲=k\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm\sqrt{k}$$

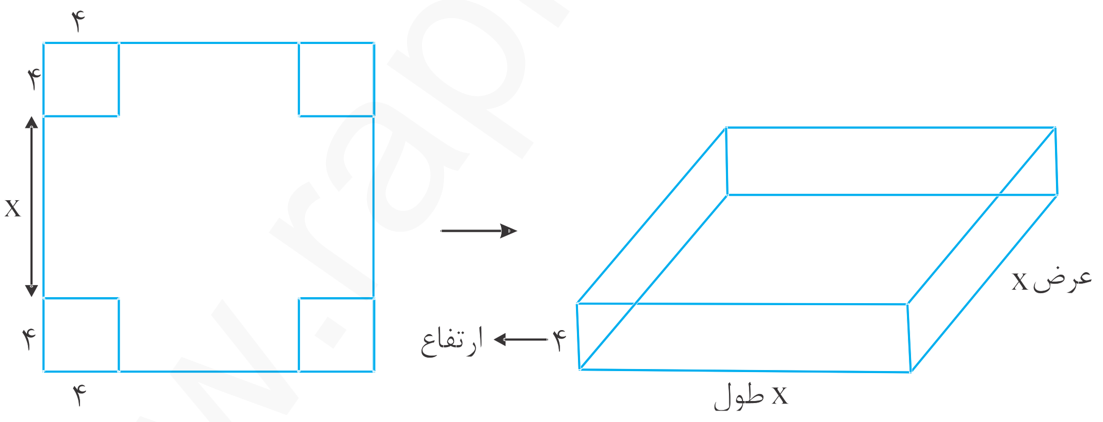
البته به جای $x$ ممکن است هر عبارت دلخواهی شامل متغیر وجود داشته باشد؛ مثلاً:

$$(x-۳)^۲=۱۲\xrightarrow{\text{جذر}}x-۳=\pm\sqrt{۱۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۳=\sqrt{۱۲}\Rightarrow x=۳+\sqrt{۱۲}\\x-۳=-\sqrt{۱۲}\Rightarrow x=۳-\sqrt{۱۲}\end{cases}$$

مثال: می‌خواهیم در چهار طرف یک صفحهٔ مقوایی مربعی، چهار مربع کوچک به ضلع ۴ سانتی‌متر جدا کرده و با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه درست کنیم. اگر بخواهیم حجم جعبه ۴۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول ضلع مربع‌های کوچک چقدر است؟ طول ضلع مربع بزرگ اولیه چقدر است؟ (مشابه مثال کتاب صفحهٔ ۷۲)

حل:




$$\text{حجم مکعب مستطیل}=\text{طول}\times\text{عرض}\times\text{ارتفاع}\Rightarrow(x).(x).(۴)=۴۰۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲=۴۰۰\Rightarrow x^۲=۱۰۰\xrightarrow{\text{جذر}}x=\pm\sqrt{۱۰۰}=\pm۱۰$$

$$\xrightarrow[\text{منفی باشد}]{\text{طول ضلع مربع نمی‌تواند}}x=۱۰cm$$

$$\text{طول ضلع مربع اصلی}=x+۴+۴=۱۰+۴+۴=۱۸cm$$

روش مربع کامل: در این روش معادله را به شکل $x^۲+bx=k$ تبدیل کرده (یعنی اولاً عدد ثابت رو به سمت راست می‌بریم، ثانیاً اگه ضریب $x^۲$ یک نبود با یک عمل تقسیم، خودمون ضریب $x^۲$ رو یک می‌کنیم.) سپس به طرفین تساوی، عدد $\frac{b^۲}{۴}$ را اضافه می‌کنیم تا سمت چپ به اتحاد مربع ۲ جمله‌ای تبدیل شود. در نهایت از طرفین جذر می‌گیریم. (در مرحلهٔ آخر، عدد سمت راست تساوی، نباید منفی باشه.)

مثال:

$$۲x^۲-۳x+۱=۰\xrightarrow{\div ۲}x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow x^۲-\underbrace{\frac{۳}{۲}}_{b}x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{به دو طرف اضافه می‌کنیم.}]{\text{عدد } \frac{b^۲}{۴} \text{ یعنی } \frac{۹}{۱۶} \text{ را}}\underbrace{x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۱۶}}_{\text{اتحاد مربع}}=-\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۱۶}\Rightarrow (x-\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۱}{۱۶}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}x-\frac{۳}{۴}=\pm\frac{۱}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow x=۱\\ x-\frac{۳}{۴}=\frac{-۱}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

روش فرمول کلی (دلتا) : در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ به عبارت $\Delta=b^۲-۴ac$ دلتا یا مبیّن معادله می‌گوییم، پس از محاسبهٔ $\Delta$ سه حالت رخ خواهد داد:

الف) اگر $\Delta>۰$ باشد $\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ معادله دو ریشهٔ متمایز دارد.

ب) اگر $\Delta=۰$ باشد $\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}$ معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد. (ریشهٔ مکرر مرتبهٔ دوم)

پ) اگر $\Delta<۰$ باشد $\Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

مثال ۱:

$$x^۲+۱۶=۸x\Rightarrow x^۲-۸x+۱۶=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b=-۸\\ c=۱۶\end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = 4$$

مثال ۲:

$$x(2x+1) = -3 \;\Rightarrow\; \underset{a}{\underset{\downarrow}{2}}x^2 + \underset{b}{\underset{\downarrow}{1}}x + \underset{c}{\underset{\downarrow}{3}} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(2)(3) = -23$$

پس معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال: با یک رشته سیم به طول ۲۰ متر می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت $\frac{75}{4}$ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را به دست آورید. (مشابه مثال کتاب صفحهٔ ۷۶)

حل: اگر طول و عرض مستطیل ساخته شده را $x$ و $y$ بنامیم، می‌توان چنین نوشت:

$$\text{محیط مستطیل} = \text{طول سیم} \Rightarrow 2(x+y) = 20 \Rightarrow x+y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \frac{75}{4} \Rightarrow x.y = \frac{75}{4} \Rightarrow x(10-x) = \frac{75}{4} \Rightarrow 10x - x^2 = \frac{75}{4}$$

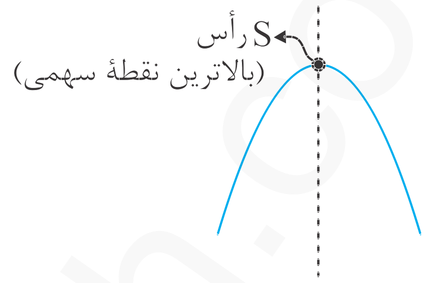
$$\Rightarrow x^2 - 10x + \frac{75}{4} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 75 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm 5}{2(1)} \begin{cases} x = \frac{10+5}{2} = \frac{15}{2} \Rightarrow y = 10 - x = 10 - \frac{15}{2} = \frac{5}{2} \\ x = \frac{10-5}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 10 - x = 10 - \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

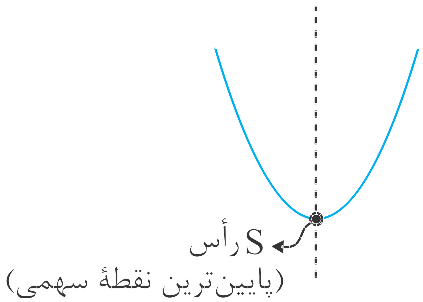
**نمودار تابع درجه دوم (سهمی)**

نمودار هر سهمی به شکل $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد $(a \neq 0)$ هر سهمی دارای یک نقطه به نام رأس می‌باشد که طول آن از $x_S = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید. (به شکل‌ها توجه کنید.)

ضمناً معادلهٔ محور تقارن هم $x=\frac{-b}{۲a}$ است. برای یافتن عرض رأس کافی است عدد به دست آمده برای x را در تابع سهمی قرار دهیم و یا می‌توانیم عرض را مستقیماً از $y=\frac{-\Delta}{۴a}$ به دست آوریم.




اگر $a<۰$ باشد سهمی ماکزیمم دارد.




اگر $a>۰$ باشد سهمی مینیمم دارد.

ضمناً برای رسم سهمی از ۲ نقطهٔ کمکی دیگر در دو طرف رأس بهره می‌گیریم.

مثال: نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۸۰)

الف) $y=-x^{۲}+۲x-۳$

ب) $y=۲x^{۲}-۴$

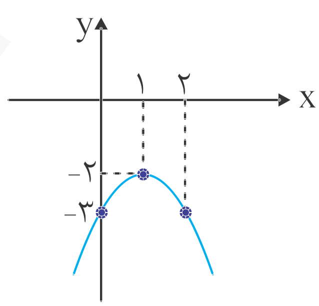
حل:

الف) $y=-x^{۲}+۲x-۳ \Rightarrow x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲}{۲(-۱)}=۱$

$\xrightarrow{\text{در تابع}} y=-۱^{۲}+۲(۱)-۳=-۲$

| x | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|
| y | -۳ | -۲ | -۳ |

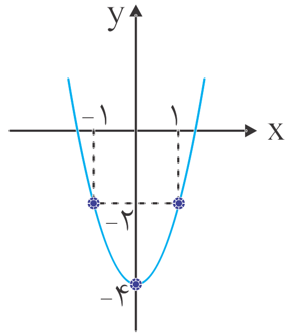
$\xrightarrow[\text{چون } a<۰ \text{ است.}]{\text{سهمی max دارد}}$




ب) $y=۲x^{۲}-۴ \Rightarrow x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۰}{۲(۲)}=۰ \xrightarrow{\text{در تابع}} y=۲(۰)^{۲}-۴=-۴$

| x | −۱ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|---|
| y | −۲ | −۴ | −۲ |

$\xrightarrow[\text{چون } a>۰ \text{ است.}]{\text{سهمی min دارد}}$




نکته: اگر معادلهٔ یک سهمی به شکل $y = a(x-h)^۲ + k$ باشد $(a \neq ۰)$، رأس سهمی به صورت $S(h,k)$ و معادلهٔ محور تقارن برابر $x = h$ خواهد بود. (ریشهٔ داخل پرانتز، طول رأس است.)

مثال: نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید. (مشابه تمرین صفحهٔ ۸۱)

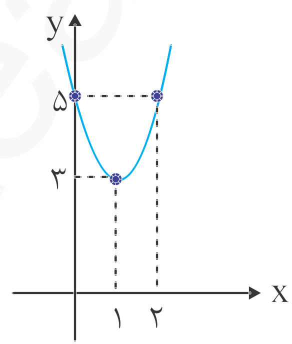
الف) $y = ۲(x-۱)^۲ + ۳$ ب) $y = -x^۲ + ۵$

حل:

$y = ۲(\underset{\substack{\downarrow \\ x-۱=۰ \ \Rightarrow \ x=۱}}{x-۱})^۲ + ۳ \Rightarrow S(۱,۳)$ مختصات رأس

| x | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|
| y | ۵ | ۳ | ۵ |

$\xrightarrow[\text{چون } a=۲>۰ \text{ است.}]{\text{سهمی min دارد}}$




تذکر: عدد ۲ که در این‌جا ضریب $x^۲$ بود باعث می‌شود، نمودار سهمی داده شده، نسبت به نمودار $y = (x-۱)^۲ + ۳$ فشرده‌تر شود؛ یعنی اگر ضریب $x^۲$ بزرگ‌تر از ۱ باشد، نمودار بسته‌تر و اگر ضریب $x^۲$ بین صفر و یک باشد، نمودار بازتر می‌شود.

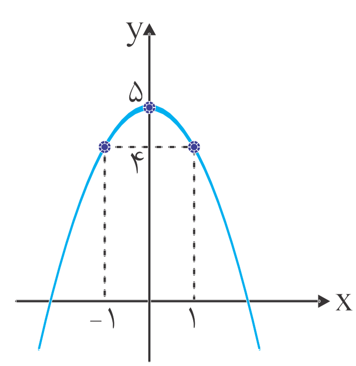
ب) $y = -\underset{\downarrow}{x}^۲ + ۵ \ \Rightarrow \ S(۰,۵)$ مختصات رأس

$x=۰$ پرانتز وجود ندارد

پس طول راس صفر است.

| x | −۱ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|---|
| y | ۴ | ۵ | ۴ |

$\xrightarrow[\text{چون } a=-۱<۰ \text{ است.}]{\text{سهمی max دارد}}$



نکته: برای یافتن محل برخورد سهمی (یا خط) با محور xها کافی است، معادلهٔ آن سهمی (یا خط) را مساوی صفر قرار دهیم و آن را حل کنیم. (یعنی به جای y، صفر می‌گذاریم.) واضح است که اگر معادلهٔ ذکر شده، ریشه نداشته باشد $(\Delta < ۰)$ نمودار محور xها را قطع نمی‌کند.

مثال: نمودار سهمی $y = x^۲ - x - ۲$ محور xها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟ (مشابه فعالیت صفحهٔ ۷۸)

حل:

$$y = x^۲ - x - ۲ \xrightarrow{(y=۰)} x^۲ - x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \Rightarrow A(۲,۰) \\ x = -۱ \Rightarrow B(-۱,۰) \end{cases}$$

مثال: نمودار سهمی $y = x^۲ - ۶x + ۹$ محور xها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

حل:

$$y = x^۲ - ۶x + ۹ \xrightarrow{y=۰} \underbrace{x^۲ - ۶x + ۹}_{\text{اتحاد مربع ۲ جمله ای}} = ۰ \Rightarrow (x-۳)^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \ \text{ریشهٔ مضاعف} \Rightarrow A(۳,۰)$$

دقت دارید که معادلهٔ $(x-۳)^۲ = ۰$ به خاطر وجود توان ۲ برای پرانتز، ریشهٔ مضاعف دارد. اگر از راه دلتا هم می‌رفتید، این‌جوری می‌شد:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۳۶ - ۳۶ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(-۶)}{۲(۱)} = ۳$$

**تعیین علامت عبارت‌های جبری – حل نامعادلات**

برای تعیین علامت عبارت درجه اول $y = ax + b$ خواهیم داشت:

$$ax + b = ۰ \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \ \text{ریشهٔ عبارت}$$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | | مخالف علامت a | ۰ | موافق علامت a | |

اگر چند عبارت درجه اول به شکل ضرب و تقسیم وجود داشته باشند باز هم می‌توانیم برای تک‌تک آن‌ها مطابق جدول بالا، عمل کنیم. سپس علامت‌ها را در هم تأثیر می‌دهیم. ضمناً اگر عبارتی دارای توان فرد بود می‌توانیم با آن مانند یک عبارت درجه اول رفتار کنیم.

مثال: عبارت $P(x)=\frac{(۲x-۱)(۴-x)}{۳x^۳}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشهٔ تک‌تک عبارت‌ها را به دست آورده و در جدول قرار می‌دهیم:

$$۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \ , \ ۴-x=۰ \Rightarrow x=۴ \ , \ ۳x^۳=۰ \Rightarrow x=۰$$

| $x$ | $-\infty$ | $۰$ | | $\frac{۱}{۲}$ | | $۴$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $۲x-۱$ | $-$ | \| | $-$ | $۰$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $۴-x$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | $۰$ | $-$ | |
| $۳x^۳$ | $-$ | $۰$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $P(x)$ | $+$ | تعریف نشده | $-$ | $۰$ | $+$ | $۰$ | $-$ | |

در همین مثال که حل کردیم اگر مثلاً گفته می‌شد نامعادلهٔ $\frac{(۲x-۱)(۴-x)}{۳x^۳}<۰$ را حل کنید، فقط کافی بود در ردیف آخر جدول، بازه‌هایی که به ازای آن‌ها، عبارت کسری داده شده منفی می‌شود را انتخاب کنیم؛ یعنی مجموعه جواب این نامعادله برابر است با:

$$(۰,\frac{۱}{۲})\cup(۴,+\infty)$$

و یا مثلاً اگر جواب نامعادلهٔ $P(x)\geq۰$ خواسته می‌شد، این‌طور می‌نوشتیم:

$$(-\infty,۰)\cup[\frac{۱}{۲},۴]$$

نکته: برای تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم حالت‌های زیر را خواهیم داشت $(P(x)=ax^2+bx+c)$:

(اگر $\Delta>0$ باشد)

| $x$ | $-\infty$ | | $x'$ | | $x''$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | موافق علامت a | 0 | مخالف علامت a | 0 | موافق علامت a | |

(اگر $\Delta=0$ باشد)

| $x$ | $-\infty$ | | $x'=x''$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | موافق علامت a | 0 | موافق علامت a | |

(اگر $\Delta<0$ باشد)

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | همه‌جا موافق علامت a | |

تذکر: عبارت‌هایی مانند $(x-1)^2$ و $|x-1|$ همواره نامنفی‌اند و به جز در ریشهٔ داخل پرانتز یا داخل قدرمطلق، همه‌جا برای‌شان علامت $(+)$ قرار می‌دهیم.

مثال: مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x(x-1)^2}{x^2-5x-6}\geq 0$ را به دست آورید. (مشابه مثال صفحهٔ ۹۱)

حل:

$$x=0\ ,\ (x-1)^2=0\ \Rightarrow\ x=1$$

$$x^2-5x-6=0\ \Rightarrow\ (x-6)(x+1)=0\ \Rightarrow\ x=-1,6$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $(x-1)^2$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| $x^2-5x-6$ | | $+$ | 0 | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| کل کسر | | $-$ | \| | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $-$ | \| | $+$ | |

تعریف نشده تعریف نشده

نکته: شرط این‌که عبارت درجه دوم $P(x)=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت باشد، (نمودار سهمی $P(x)$ همواره بالای محور $x$ها باشد)، این است که $\Delta<۰$ و $a>۰$ باشد.

مثال: به ازای چه مقادیری از $m$ عبارت $y=x^۲-۲mx+۱$ همواره مثبت است؟ (مشابه مثال صفحهٔ ۹۰)

حل:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲m)^۲-۴(۱)(۱)=\underbrace{۴m^۲-۴}_{\substack{\text{ریشه های } ۴m^۲-۴=۰ \\ \text{عبارت اند از } m=\pm۱}}<۰\ ,\ a=۱>۰$$

| $m$ | $-\infty$ | | $-۱$ | | $+۱$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta=۴m^۲-۴$ | | $+$ | ۰ | $-$ | ۰ | $+$ | |

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-۱,۱)$

نامعادلات قدرمطلقی: برای حل نامعادلات قدرمطلقی از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم. ($u$ عبارتی دلخواه شامل متغیر است.)

$$|u|<k\ \Rightarrow\ -k<u<k\ ,\ |u|>k\ \Rightarrow\begin{cases}u>k\\ \text{یا}\\ u<-k\end{cases}$$

مثال ۱:

$$\left|\frac{x-۳}{۲}-۴\right|\le۱\ \Rightarrow\ \left|\frac{x-۳-۸}{۲}\right|\le۱\ \Rightarrow\ \left|\frac{x-۱۱}{۲}\right|\le۱$$

$$\Rightarrow -۱\le\frac{x-۱۱}{۲}\le۱\ \xrightarrow{\times۲}\ -۲\le x-۱۱\le۲$$

$$\xrightarrow{+۱۱}-۲+۱۱\le x-۱۱+۱۱\le۲+۱۱\ \Rightarrow\ ۹\le x\le۱۳$$

مثال ۲:

$$|۷-۲x|>۵ \Rightarrow \begin{cases} ۷-۲x>۵ \Rightarrow -۲x>-۲ \Rightarrow x<۱ \\ ۷-۲x<-۵ \Rightarrow -۲x<-۱۲ \Rightarrow x>۶ \end{cases}$$

مجموعه جواب $=(-\infty,۱)\cup(۶,+\infty)$

نکته: برای حل نامعادلات دوگانه شبیه $g(x)\le f(x)\le h(x)$ و امثال آن، می‌توانیم آن‌ها را به دو نامعادلهٔ $g(x)\le f(x)$ و $f(x)\le h(x)$ تبدیل کرده و هر یک از آن‌ها را جداگانه حل کرده و اشتراک بگیریم، البته اگر متغیر فقط در وسط نامعادلهٔ دوگانه وجود داشت می‌توانیم نامعادله را خیلی سریع‌تر حل کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱:

$$\underset{\text{متغیر ندارد}}{\underset{\downarrow}{۷}} \le ۵x-۱< \underset{\text{متغیر ندارد}}{\underset{\downarrow}{۱۳}} \xrightarrow{+۱} ۷+۱\le ۵x-۱+۱<۱۳+۱$$

$$\Rightarrow ۸\le ۵x<۱۴ \xrightarrow{\div ۵} \frac{۸}{۵}\le x<\frac{۱۴}{۵}$$

مثال ۲:

$$\underbrace{x+۱}_{\text{متغیر ندارد}}<۲x-۳<\underbrace{۳x+۸}_{\text{متغیر ندارد}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱<۲x-۳ \Rightarrow x>۴ \\ ۲x-۳<۳x+۸ \Rightarrow x>-۱۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>۴$$

۱ اگر معادله $x^{۲} + ۳x + ۲k - ۱ = ۰$ دارای ریشه حقیقی نباشد، حدود $k$ را حساب کنید.

**پاسخ:** ۱ باید $\Delta$ کوچک‌تر از صفر باشد.

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (۳)^{۲} - ۴(۱)(۲k - ۱) < ۰ \Rightarrow ۹ - ۸k + ۴ < ۰ \Rightarrow -۸k < -۱۳ \Rightarrow k > \frac{۱۳}{۸}$$

۲ مجموع مربعات دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر ۵۲ است. این دو عدد را حساب کنید.

**پاسخ:** ۱ دو عدد زوج متوالی $\begin{cases} ۲x \\ ۲x + ۲ \end{cases} \Rightarrow (۲x)^{۲} + (۲x + ۲)^{۲} = ۵۲ \Rightarrow ۴x^{۲} + ۴x^{۲} + ۸x + ۴ = ۵۲$

$$\xrightarrow{\div ۴} ۲x^{۲} + ۲x + ۱ = ۱۳ \Rightarrow ۲x^{۲} + ۲x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \frac{(۲x - ۴)(۲x + ۶)}{۲} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \text{ ق ق} \\ x = -۳ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=۲} \begin{cases} ۲x = ۴ \\ ۲x + ۲ = ۶ \end{cases}$$

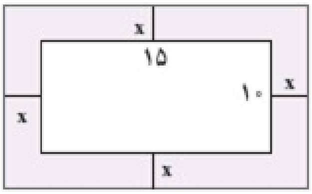
۳ معادله زیر را به روش مربع کامل حل شده است. جاهای خالی را پر کنید.

$$x^{۲} - ۸x - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow x^{۲} - ۸x = ۳$$
$$\Rightarrow x^{۲} - ۸x + \ldots = ۳ + \ldots$$
$$\Rightarrow (x - \ldots)^{۲} = \ldots$$
$$\Rightarrow x - \ldots = \ldots$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \ldots \\ x = \ldots \end{cases}$$

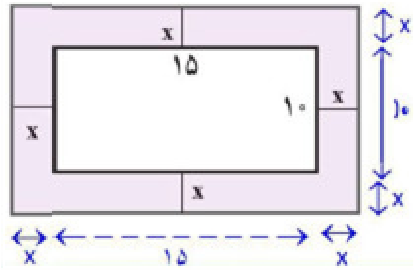
**پاسخ:** ۱

$$x^{۲} - ۸x - ۳ = ۰$$
$$\Rightarrow x^{۲} - ۸x = ۳$$
$$\Rightarrow x^{۲} - ۸x + ۱۶ = ۳ + ۱۶$$
$$\Rightarrow (x - ۴)^{۲} = ۱۹$$
$$\Rightarrow x - ۴ = \pm\sqrt{۱۹}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۴ + \sqrt{۱۹} \\ x = ۴ - \sqrt{۱۹} \end{cases}$$

۴ یک عکس به اندازه‌ی ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.




**پاسخ:** ۱ طبق شکل، طول مستطیل $۱۵ + ۲x$ و عرض آن $۱۰ + ۲x$ است. بنابراین طبق فرمول مساحت:




$$(۲x + ۱۰)(۲x + ۱۵) = ۳۰۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۵۰x + ۱۵۰ = ۳۰۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ + ۵۰x - ۱۵۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۲x^۲ + ۲۵x - ۷۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = ۱۲۲۵} x = \frac{-۲۵ \pm ۳۵}{۴}$$

$\Rightarrow$ $x = -۱۵$ غیرقابل قبول

$x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow$ ۱۵۲۰.طول قاب عکس برابر و عرض آن برابر می باشد

۵ اختلاف سنی دو برادر با یک‌دیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام چه‌قدر است؟

**پاسخ:** ۱

سن برادر کوچک $= x \xrightarrow[\text{چهار سال بعد}]{} = x + ۴$

سن برادر بزرگ $= x + ۴ \longrightarrow = x + ۸$

$\Rightarrow (x + ۴)(x + ۸) = ۶۰$

$$\Rightarrow x^۲ + ۱۲x + ۳۲ = ۶۰ \Rightarrow x^۲ + ۱۲x - ۲۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x + ۱۴) = ۰$$

$\Rightarrow$ $x = -۱۴$ غیرقابل قبول چون سن منفی نداریم

$x = ۲ \Rightarrow$ ۶۲.برادر کوچک ساله و برادر بزرگ ساله اند

۶ هریک از معادله‌های زیر را با روش فرمولی کلی حل کنید.

۱) $۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰$ ۲) $r - r^۲ = ۳$

۳) $a^۲ + ۲\sqrt{۳}a = ۹$ ۴) $\frac{t^۲}{۳} - \frac{t}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰$

پاسخ: ۱

$$۱\Big)\ ۴x^۲ - ۱۳x + ۳ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۱۶۹ - ۴۸ = ۱۲۱} x = \frac{۱۳ \pm ۱۱}{۸} \Rightarrow x = ۳ , x = \frac{۱}{۴}$$

۲) $r - r^۲ = ۳ \Rightarrow r^۲ - r + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ - ۱۲ = -۱۱ \Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

$$۳\Big)\ a^۲ + ۲\sqrt{۳}a = ۹ \Rightarrow a^۲ + ۲\sqrt{۳}a - ۹ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۴۸} a = \frac{-۲\sqrt{۳} \pm \sqrt{۴۸}}{۲} = \frac{-۲\sqrt{۳} \pm ۴\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = \sqrt{۳} \\ a = -۳\sqrt{۳} \end{array} \right.$$

$$۴\Big)\ \frac{t^۲}{۳} - \frac{t}{۲} - \frac{۳}{۲} = ۰ \xrightarrow{\times ۶} ۲t^۲ - ۳t - ۹ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۸۱} t = \frac{۳ \pm ۹}{۴} \Rightarrow t = ۳ , t = \frac{-۳}{۲}$$

۷ معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^۲ - ۶x = ۷$ ۲) $s^۲ - ۳s + ۳ = ۰$

۳) $r^۲ + ۴r + ۴ = ۰$ ۴) $۲a^۲ + ۵a - ۳ = ۰$

پاسخ: ۱

$$۱\Big)\ x^۲ - ۶x + ۹ = ۷ + ۹ \Rightarrow (x - ۳)^۲ = ۱۶ \Rightarrow x - ۳ = \pm ۴ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x - ۳ = ۴ \Rightarrow x = ۷ \\ x - ۳ = -۴ \Rightarrow x = -۱ \end{array} \right.$$

۲) $s^۲ - ۳s = -۳ \Rightarrow s^۲ - ۳s + \frac{۹}{۴} = -۳ + \frac{۹}{۴} \Rightarrow \left(s - \frac{۳}{۲}\right)^۲ = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow$ غیرممکن است

$\Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

$$۳\Big)\ r^۲ + ۴r + ۴ = ۰ \Rightarrow (r + ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow r + ۲ = ۰ \Rightarrow r = -۲$$

$$۴\Big)\ ۲a^۲ + ۵a - ۳ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} a^۲ + \frac{۵}{۲}a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow a^۲ + \frac{۵}{۲}a + \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{۳}{۲} + \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \left(a + \frac{۵}{۴}\right)^۲ = \frac{۴۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow a + \frac{۵}{۴} = \pm \frac{۷}{۴} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a + \frac{۵}{۴} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \\ a + \frac{۵}{۴} = -\frac{۷}{۴} \Rightarrow a = -۳ \end{array} \right.$$

۸ هریک از معادله‌های زیر را با ریشه‌ی دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^۲ - ۲ = ۲۶$ ۲) $x^۲ + ۱۲ = ۳$

۳) $(۳t - ۲)^۲ = ۴$ ۴) $۳ - ۳k = ۳k(۲k - ۱)$

پاسخ: ۱

$$۱)\ n^۲ - ۲ = ۲۶ \Rightarrow n^۲ = ۲۸ \Rightarrow \pm\sqrt{۲۸} = \pm ۲\sqrt{۷}$$

۲) $x^۲ + ۱۲ = ۳ \Rightarrow x^۲ = -۹ \Rightarrow$ غیرممکن است و معادله جواب حقیقی ندارد

$$۳)(۳t - ۲)^۲ = ۴ \Rightarrow ۳t - ۲ = \pm ۲ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} ۳t - ۲ = ۲ \Rightarrow t = \frac{۴}{۳} \\ ۳t - ۲ = -۲ \Rightarrow t = ۰ \end{array} \right.$$

$$۴)\ ۳ - ۳k = ۳k(۲k - ۱) \Rightarrow ۳ - ۳k = ۶k^۲ - ۳k \Rightarrow ۳ = ۶k^۲ \Rightarrow k^۲ = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow k = \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۹ معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $x^۲ - ۱۱x = -۱۰$ ۲) $۵t^۲ = ۲۰$

۳) $۵a^۲ - ۷a = ۲a(a - ۳)$ ۴) $۴k^۲ - ۱۲k + ۸ = ۰$

پاسخ: ۱

$$۱)\ x^۲ - ۱۱x = -۱۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۱x + ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۱۰) = ۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = ۱ \\ x = ۱۰ \end{array} \right.$$

$$۲)\ ۵t^۲ = ۲۰ \Rightarrow ۵t^۲ - ۲۰ = ۰ \Rightarrow ۵(t - ۲)(t + ۲) = ۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} t - ۲ = ۰ \Rightarrow t = ۲ \\ t + ۲ = ۰ \Rightarrow t = -۲ \end{array} \right.$$

$$۳)\ ۵a^۲ - ۷a = ۲a(a - ۳) \Rightarrow ۵a^۲ - ۷a = ۲a^۲ - ۶a \Rightarrow ۳a^۲ - a = ۰ \Rightarrow a(۳a - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = ۰ \\ ۳a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۳} \end{array} \right.$$

$$۴)\ ۴k^۲ - ۱۲k + ۸ = ۰ \Rightarrow ۴(k - ۱)(k - ۲) = ۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} k - ۱ = ۰ \Rightarrow k = ۱ \\ k - ۲ = ۰ \Rightarrow k = ۲ \end{array} \right.$$

۱۰ به ازای چه مقادیری از a، $(a - ۱)x^۲ + (a - ۸)x + a + ۷ = ۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف است؟

پاسخ: ۱

$$(a - ۸)^۲ - ۴(a - ۱)(a + ۷) = ۰$$

$$-۳a^۲ - ۴۰a + ۹۲ = ۰$$

$a = ۲$ و $a = -\frac{۴۶}{۳}$

دکتر الهه بنام
مدرس زیست رپیتیچ
مهندس شهاب نصیری
مدرس فیزیک رپیتیچ
مهندس علی داودوندی
مدرس ریاضی رپیتیچ
دکتر متین هوشیار
مدرس شیمی رپیتیچ
رپیتیچ
سریعتر یاد بگیـــــــــــــر...!
با اســاتید رتبه بــرتر و رتبــه پرور
بــه همــراه مشــاورین رتبــه برتر
تــو هــم رتبه برتــر میشــی رفیق
rapiteach.com