شب امتحان

ریاضی یازدهم

دانلود جزوات
شب امتحان

رپیتیچ

ویدیو های
شب امتحان

سریعتر یادبگیریا

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

علی داودوندی
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی
مدرس ریاضی رپیتیچ

فصل ۱ : هندسهٔ تحلیلی و جبر — پایه یازدهم

فصل ۱: هندسهٔ تحلیلی و جبر

درس اول: هندسهٔ تحلیلی

خط

تعریف شیب خط: شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. شیب خطی که از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

معادلهٔ خط

معادلهٔ خطی که شیب آن m بوده و از نقطه‌ای مثل $A(x_1, y_1)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از $A(0,-1)$ و $B(4,2)$ عبور کند.

$$(A(\underset{x_1}{\underset{\downarrow}{0}}, \underset{y_1}{\underset{\downarrow}{-1}}), B(\underset{x_2}{\underset{\downarrow}{4}}, \underset{y_2}{\underset{\downarrow}{2}})) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-1)}{4-0} = \frac{3}{4}$$

$$y - y_1 = m \Rightarrow m(x - x_1) \Rightarrow y - (-1) = \frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - 1$$

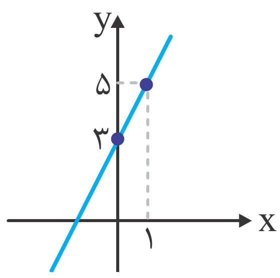
رسم نمودار خط

برای رسم نمودار یک خط بهتر است ابتدا معادلهٔ خط را به شکل استاندارد یعنی $y = mx + n$ تبدیل کنیم، سپس به x دو عدد دلخواه ولی مناسب نسبت دهیم و y این دو x را به دست آوریم. حال دو نقطهٔ به دست

آمده را به هم وصل کرده و امتداد می‌دهیم. ضمناً m و n عرض از مبدأ خط می‌باشد (عرض از مبدأ، محل برخورد نمودار با محور yها می‌باشد.)

مثال: نمودار خط $۲y-۴x=۶$ از کدام ناحیهٔ محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

حل:



$$۲y=۴x+۶\xrightarrow{\div ۲}y=۲x+۳ \quad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۳ & ۵ \end{array}$$

$\Rightarrow$ نمودار از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

خطوط موازی و عمود

اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب‌های مساوی دارند، ولی اگر عمود باشند، شیب یکی از آن‌ها، عکس و قرینهٔ دیگری است یعنی حاصل‌ضرب شیب‌های آن‌ها (-۱) است:

$$m\times m'=-۱$$

تذکر: خطوط به معادلهٔ $x=a$ و $y=b$ همواره بر هم عمودند. $(a,b\in R)$ مثلاً دو خط $x=-۱$ و $y=\sqrt{۲}$ بر هم عمودند.

مثال: مقدار k را طوری به دست آورید که دو خط $۲y+۱=x$ و $(k-۱)y=۳x-۲$ بر هم عمود باشند.

حل:

$$۲y=x-۱\xrightarrow{\div ۲}y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=\frac{۱}{۲}$$

$$(k-۱)y=۳x-۲\xrightarrow{\div (k-۱)}y=\frac{۳}{k-۱}x-\frac{۲}{k-۱}$$

$$\Rightarrow m'=\frac{۳}{k-۱}\ ,\ m\times m'=-۱\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{k-۱}=-۱\Rightarrow\frac{۳}{۲k-۲}=-۱$$

$$\Rightarrow -۲k+۲=۳\Rightarrow -۲k=۱\Rightarrow k=-\frac{۱}{۲}$$

مثال: عرض از مبدأ خطی که از نقطهٔ $A(۳,۴)$ گذشته و با خط $x-y=۴$ موازی باشد را به دست آورید.

خط $x-y=۴ \Rightarrow -y=-x+۴ \xrightarrow{\div(-۱)} y=x-۴ \Rightarrow m=۱$

مطلوب ما باید با خط داده شده موازی باشد، پس شیب آن ۱ است؛ لذا:

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-۴=۱\times(x-۳) \Rightarrow y=x+۱$$

$\Rightarrow$ عرض از مبدأ$=۱$

نقطه در دستگاه مختصات

فاصلهٔ بین دو نقطه

اگر دو نقطهٔ A و B هم‌عرض باشند، آن‌گاه: $AB=|x_A-x_B|$

اگر دو نقطهٔ C و D هم طول باشند، آن‌گاه: $CD=|y_C-y_D|$

مثال: الف) فاصلهٔ نقاط $A(۵,۴)$ و $B(-۶,۴)$ را به دست آورید.

ب) فاصلهٔ نقاط $C(۳,۹)$ و $D(۳,-۵)$ را به دست آورید.

حل: الف) A و B هم‌عرض هستند، لذا:

$$AB=|x_A-x_B|=|۵-(-۶)|=۱۱$$

ب) C و D هم‌طول هستند، لذا: $CD=|y_C-y_D|=|۹-(-۵)|=۱۴$

در حالت کلی اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطه از صفحهٔ مختصات باشند فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر (طول پاره‌خط AB) برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

مختصات وسط پاره‌خط

اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ مختصات دو سر پاره‌خطی باشند، مختصات نقطهٔ M وسط AB عبارت است از:

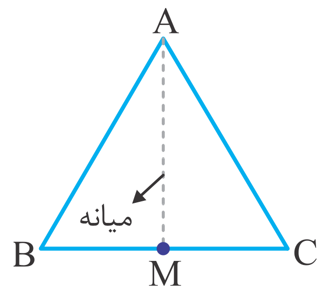
$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}\ ,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

تذکر: نقاط A و B نسبت به نقطهٔ M (وسط A و B) قرینه هستند.

مثال: اگر $A(۱,۲)$، $B(-۴,۴)$ و $C(۰,-۸)$ سه رأس مثلثی باشند، اندازهٔ میانهٔ AM را به دست آورید. (M وسط BC است.)

حل: M وسط BC است، لذا:

(شکل فرضی است.)



$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{۲} = \dfrac{-۴+۰}{۲} = -۲ \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{۲} = \dfrac{۴+(-۸)}{۲} = -۲ \end{cases} \qquad A\left|\begin{matrix} ۱ \\ ۲ \end{matrix}\right. \,,\ M\left|\begin{matrix} -۲ \\ -۲ \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$$

$$= \sqrt{(۱+۲)^۲ + (۲+۲)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

مثال: قرینهٔ نقطهٔ $A(۳,-۲)$ را نسبت به $M(۰,۴)$ به دست آورید.

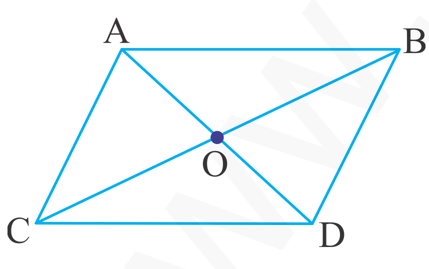
حل: اگر قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به M را B بنامیم، M در واقع، نقطهٔ وسط پاره‌خط AB است لذا خواهیم نوشت:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow ۰ = \frac{۳ + x_B}{۲} \Rightarrow ۳ + x_B = ۰ \Rightarrow x_B = -۳$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{-۲ + y_B}{۲} \Rightarrow -۲ + y_B = ۸$$

$$\Rightarrow y_B = ۱۰ \Rightarrow B(-۳,۱۰)$$

یک خاصیت مهم از متوازی‌الاضلاع:



در هر متوازی‌الاضلاع، مانند شکل مقابل، بین مختصات ۴ رأس، روابط زیر برقرار است (مربع، مستطیل و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع هستند.)

$$\begin{cases} x_A + x_D = x_B + x_C \\ y_A + y_D = y_B + y_C \end{cases}$$

اثبات: می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، لذا:

$$(x_O=\frac{x_A+x_D}{۲}\ ,\ x_O=\frac{x_B+c_C}{۲})\Rightarrow\frac{x_A+x_D}{۲}=\frac{x_B+x_C}{۲}$$

$$\Rightarrow x_A+x_D=x_B+x_C$$

$$(y_O=\frac{y_A+y_D}{۲}\ ,\ y_O=\frac{y_B+y_C}{۲})\Rightarrow\frac{y_A+y_D}{۲}=\frac{y_B+y_C}{۲}$$

$$\Rightarrow y_A+y_D=y_B+y_C$$

یعنی همیشه جمع مختصات دو رأس مقابل برابر است با جمع مختصات دو رأس مقابل دیگر.

مثال: نقاط $A(۱,۴)$، $B(۵,-۲)$ و $C(۰,۶)$ سه رأس متوالی یک لوزی هستند. مختصات رأس چهارم لوزی را به دست آورید.

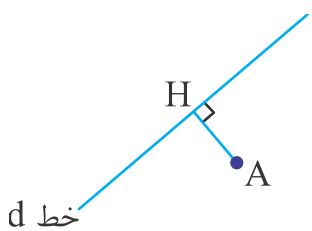
$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow ۱+۰=۵+x_D\Rightarrow x_D=-۴$$

$$y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow ۴+۶=-۲+y_D$$

$$\Rightarrow y_D=۱۲\Rightarrow D(-۴,۱۲)$$

فاصلهٔ نقطه از خط

منظور از فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ تا خط $d:ax+by+c=۰$ طول پاره‌خطی است که از A عمود بر خط d رسم می‌شود.



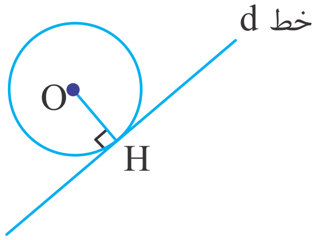
$$AH=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

به عنوان مثال فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۴)$ تا خط نیمساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y=x\Rightarrow -x+y=۰\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\ b=۱\\ c=۰\end{cases}\quad ,\qquad A(\underset{x_۱}{\underset{\downarrow}{۳}},\underset{y_۱}{\underset{\downarrow}{۴}})$$

$$AH=\frac{|(-۱)(۳)+(۱)(۴)+۰|}{\sqrt{(-۱)^۲+۱^۲}}=\frac{|-۳+۴|}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

نکته: اگر خطی بر یک دایره مماس باشد (دایره را در یک نقطه قطع کند)، فاصلهٔ مرکز دایره تا این خط، همان شعاع دایره است؛ چون خط مماس، بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، عمود است.



فاصلهٔ O تا خط $d = OH =$ شعاع دایره

مثال: خط $۴x - ۲y = ۱$ بر دایره‌ای به مرکز $O(۳, -۶)$ مماس است. شعاع دایره را به دست آورید.

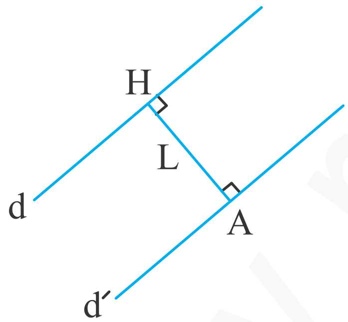
حل:

$$۴x - ۲y - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۴ \\ b = -۲ \\ c = -۱ \end{cases} , \quad O(\underset{x_۱}{\underset{\downarrow}{۳}}, \underset{y_۱}{\underset{\downarrow}{-۶}})$$

$$\text{شعاع} = OH = \frac{|۴(۳) + (-۲)(-۶) + (-۱)|}{\sqrt{۴^۲ + (-۲)^۲}} = \frac{۲۳}{\sqrt{۲۰}}$$

فاصلهٔ بین دو خط موازی

دو خط $ax + by + c = ۰$ و $ax + by + c' = ۰$ با هم موازی‌اند و فاصلهٔ بین آن‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:



$$L = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

مثال: فاصلهٔ دو خط $x - ۲y = ۴$ و $۳x - ۶y = ۱۰$ را به دست آورید.

حل: اگر معادلهٔ $x - ۲y = ۴$ را در ۳ ضرب کنیم به معادلهٔ $۳x - ۶y = ۱۲$ می‌رسیم، با مقایسهٔ این معادله و معادلهٔ خط دیگر یعنی $۳x - ۶y = ۱۰$ متوجه می‌شویم که دو خط موازی‌اند؛ زیرا ضرایب x و y آن‌ها با هم مساوی است.

$$3x - 6y \underbrace{\boxed{-12}}_{c} = 0 \quad , \quad 3x - 6y \underbrace{\boxed{-10}}_{c'} = 0$$

$$L = \frac{|(-12) - (-10)|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2}} = \frac{2}{\sqrt{45}}$$

درس دوم: تابع درجه دوم و معادلهٔ درجه ۲

روش تغییر متغیر برای حل معادلات

گاهی اوقات، یک عبارت و توانی از آن عبارت در معادله دیده می‌شود که بهتر است آن عبارت را مثلاً t فرض کرده تا آن معادله، به یک معادلهٔ درجه دوم ساده تبدیل شود؛ سپس آن معادله را حل کرده تا t به دست آید. در نهایت به جای t، عبارت اولیه را قرار می‌دهیم.

مثال: معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

الف) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$

ب) $(x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1) = 6$

حل: الف) x^4 را می‌توان به شکل $(x^2)^2$ نوشت، پس x^2 و توان دوم x^2 در معادله دیده می‌شوند لذا نام x^2 را t در نظر می‌گیریم:

$$t^2 - 5t - 6 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (t-6)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 6 \Rightarrow x^2 = 6 \xrightarrow{\text{جذر}} x = \pm\sqrt{6} \\ t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{نمی‌توان از (-1) جذر گرفت} \end{cases}$$

ب) عبارت $(x-1)$ دوبار تکرار شده، پس نام آن را t می‌گذاریم:

$$t^2 + 2\sqrt{3}t - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6)$$

$$= 12 + 24 = 36 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{36}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2} = \frac{2(-\sqrt{3} \pm 3)}{2} = -\sqrt{3} \pm 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=-\sqrt{3}+3 \Rightarrow x=4-\sqrt{3} \\ x-1=-\sqrt{3}-3 \Rightarrow x=-2-\sqrt{3} \end{cases}$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

در معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ با فرض آن‌که $\Delta>0$ است، مجموع ریشه‌ها (S) و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) به صورت زیر خواهد بود:

$$S=\frac{-b}{a} \ , \ P=\frac{c}{a}$$

اثبات: می‌دانیم اگر $\Delta>0$ باشد، ریشه‌ها عبارت‌اند از:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \ , \ x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S=x'+x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

$$P=x'.x''=(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

نکته: در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ اگر a و c مختلف‌العلامت باشند معادله حتماً دو ریشهٔ متمایز دارد؛ زیرا در رابطهٔ $\Delta=b^2-4ac$ مقدار $a.c$ منفی می‌شود؛ پس Δ مثبت خواهد بود. هم‌چنین ریشه‌های معادله، مختلف‌العلامت هستند زیرا $P=x'.x''=\frac{c}{a}$ ولی $\frac{c}{a}$ منفی است؛ پس چون ضرب ریشه‌ها منفی شده است، یکی مثبت و دیگری منفی است.

مثال: با توجه به معادلهٔ $x^2+5x-3=0$ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن را به دست آورید.

ب) بدون حل معادله، بگویید علامت ریشه‌ها چگونه است؟

حل: الف) a و c علامت‌های مختلف دارند، لذا $\Delta > ۰$ است و معادله حتماً دو ریشهٔ متمایز دارد. حال S و P را محاسبه می‌کنیم:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-۵}{۱} = -۵$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-۳}{۱} = -۳$$

ب) علامت ریشه‌ها مختلف است (یکی مثبت و دیگری منفی)، چون a و c مختلف‌العلامت هستند.

تشکیل معادلهٔ درجه دوم با داشتن ریشه‌ها

اگر ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دوم α و β باشند، خود آن معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(x-\alpha)(x-\beta) = ۰ \Rightarrow x^۲ \underbrace{\qquad\qquad}_{} \quad \beta = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - \underbrace{\qquad\quad}_{} \qquad \beta = ۰ \Rightarrow x^۲ - Sx + P = ۰$$

پس اگر α و β داده شوند $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha.\beta$ را پیدا کرده و آن‌ها را در فرمول $x^۲ - Sx + P = ۰$ قرار می‌دهیم.

مثال: معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۳}$ باشد.

حل:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۳} + \frac{۱-\sqrt{۵}}{۳} = \frac{۲}{۳} \\ P = \alpha\beta = (\frac{۱+\sqrt{۵}}{۳})(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۳}) = \frac{۱^۲ - \sqrt{۵}^۲}{۹} = \frac{۱-۵}{۹} = \frac{-۴}{۹} \end{cases}$$

معادلهٔ مطلوب: $\xrightarrow{x^۲ - Sx + P = ۰} x^۲ - \frac{۲}{۳}x - \frac{۴}{۹} = ۰$

ماکزیمم و مینیمم سهمی

می‌دانیم طول رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ یعنی نقطهٔ S از رابطهٔ $x_S=\frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید. حال اگر این عدد را به جای xهای معادلهٔ سهمی قرار دهیم مقدار y_S به دست می‌آید که همان مقدار ماکزیمم یا مینیمم سهمی است (اگر $a>0$ باشد مینیمم و اگر $a<0$ باشد ماکزیمم است). ضمناً مستقیماً می‌توانیم مقدار ماکزیمم یا مینیمم را از رابطهٔ $y=\frac{-\Delta}{4a}$ به دست آوریم.

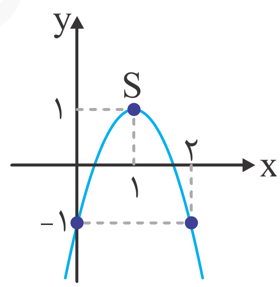
مثال: بیشترین مقدار (ماکزیمم) تابع $f(x)=-2x^2+4x-1$ را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

حل:

$$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2(-2)}=1 \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{در معادلهٔ } f(x)} y_S=-2(1)^2+4(1)-1=1 \Rightarrow S(1,1)$$

x	۰	۱	۲
y	۱-	۱	۱-

$\xrightarrow{a<0}$



بهینه‌سازی

یعنی ماکزیمم کردن مقدار یک عبارت درجه دوم. برای این منظور، عبارتی را که می‌خواهیم ماکزیمم شود فقط برحسب یک متغیر می‌نویسیم؛ سپس از فرمول ($\frac{-b}{2a}$= مقدار متغیر) استفاده می‌کنیم.

مثال: اگر رابطهٔ $2x+y=20$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری بیابید که عبارت $5xy$ ماکزیمم (حداکثر) شود؟ سپس مقدار ماکزیمم را به دست آورید.

حل: از رابطهٔ $2x+y=20$ به دلخواه x یا y را برحسب دیگری به دست می‌آوریم و در عبارت $5xy$ قرار می‌دهیم تا این عبارت فقط شامل یک متغیر شود:

$$2x+y=20 \Rightarrow y=-2x+20$$

$$\text{عبارت اصلی}=5xy=5x(-2x+20)=-10x^2+100x$$

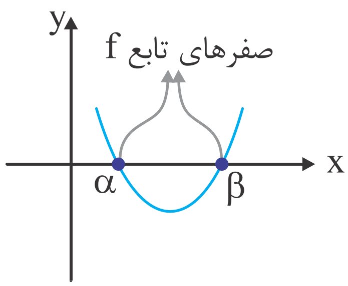
$$\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۰۰}{۲(-۱۰)}=۵$$

$$y=-۲x+۲۰\xrightarrow{x=۵}y=-۲(۵)+۲۰=۱۰$$

ماکزیمم عبارت اصلی $=۵xy=۵\times۵\times۱۰=۲۵۰$

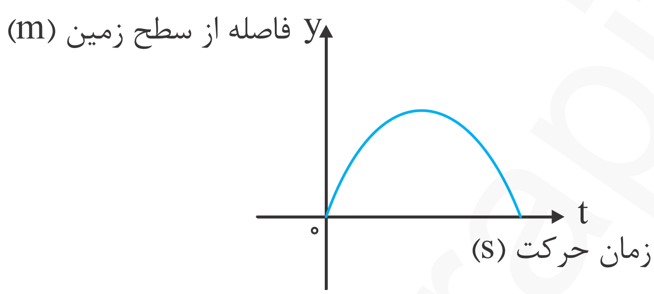
البته اگر $x=۵$ را در $(-۱۰x^{۲}+۱۰۰x)$ هم قرار دهیم، باز هم به جواب ۲۵۰ خواهیم رسید.

صفرهای تابع درجه دوم



منظور از صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ همان ریشه‌های معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$ می‌باشد. ضمناً می‌دانید که این ریشه‌ها محل برخورد سهمی با محور xها را نشان می‌دهند، در شکل روبه‌رو، α و β صفرهای تابع f هستند.

مثال: نمودار مکان – زمان گلولهٔ کوچکی که در راستای قائم با سرعت اولیهٔ $۳۰m/s$ به طرف بالا پرتاب می‌شود به شکل زیر است. اگر ضابطهٔ این نمودار $y=-۱۰t^{۲}+۴۰t$ باشد، مشخص کنید که:

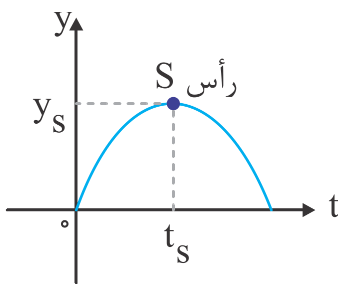


الف) پس از چند ثانیه، گلوله به بالاترین نقطهٔ ممکن می‌رسد؟

ب) بیشترین ارتفاع گلوله از سطح زمین چقدر است؟

پ) گلوله پس از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟

حل: الف)



زمان رسیدن گلوله به نقطهٔ اوج خود: $t_S = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-40}{2(-10)} = 2$

ب)

$$y = -10t^2 + 40t \xrightarrow{t_S=2} y_S = -10(2)^2 + 40(2)$$
$$= -40 + 80 = 40 \quad \text{متر}$$

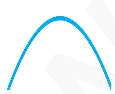
پس حداکثر ارتفاع گلوله از سطح زمین ۴۰ متر است.

پ)

$$y = -10t^2 + 40t \xrightarrow[\text{باید } y=0 \text{ باشد}]{\text{برخورد با زمین یعنی}} -10t^2 + 40t = 0$$
$$\Rightarrow t(-10t+40) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 & (\text{غ ق ق}) \\ t = 4 & (\text{ق ق}) \end{cases}$$

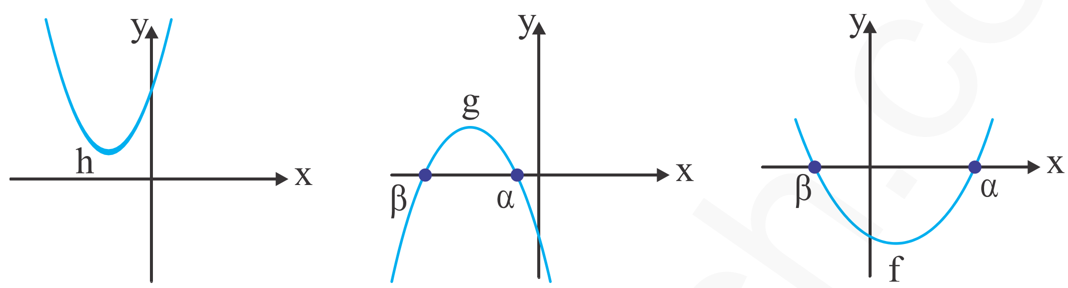
لذا پس از ۴ ثانیه از پرتاب، گلوله به زمین می‌خورد.

مشخص کردن علامت‌های c، b ، a ، تعداد و علامت صفرهای تابع $y = ax^2 + bx + c$ با داشتن نمودار آن:

در این‌گونه سؤالات، ابتدا علامت a را با توجه به این‌که سهمی به شکل  یا  است مشخص می‌کنیم؛ بعد از آن نگاه می‌کنیم که رأس سهمی (نقطهٔ S) در کدام ربع است و به کمک $x_S = \dfrac{-b}{2a}$ و علامت طول رأس، علامت b هم تعیین می‌شود. در نهایت، عرض از مبدأ سهمی را تعیین می‌کنیم. اگر سهمی، محور yها را بالای مبدأ قطع کرده باشد، $c > 0$ و اگر پایین مبدأ قطع کرده باشد $c < 0$ است. صفرهای سهمی نیز،

همان نقاط برخورد با محور xها هستند و می‌دانید اگر نقطه‌ای روی محور xها و سمت راست مبدأ باشد، طولش مثبت و اگر سمت چپ مبدأ باشد طولش منفی است.

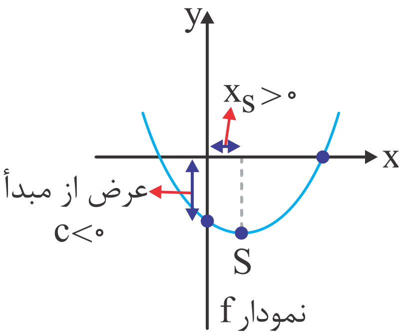
به عنوان مثال، جدول زیر را با توجه به نمودارهای f، g و h پر می‌کنیم (سر جلسهٔ امتحان، نام‌های α و β ذکر نمی‌شود، ما خودمان آن‌ها را α و β نامیده‌ایم.)



تابع / ویژگی	f	g	H
علامت a	+	−	+
علامت b	−	−	+
علامت c	−	−	+
تعداد ریشه‌ها	۲	۲	صفر (سهمی محور xها را قطع نکرده)
علامت ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی مثبت و یکی منفی (α مثبت و β منفی است.)	هر دو ریشه منفی (α و β سمت چپ مبدأ هستند.)	--------

برای آن‌که متوجه شوید جدول را چطور پر کرده‌ایم، یک ستون آن، مثلاً نمودار f را بررسی می‌کنیم. با توجه به شکل، دهانهٔ نمودار f به سمت بالاست، پس $a > 0$ است. از طرفی، رأس سهمی در ربع چهارم است و می‌دانیم در ربع چهارم، طول نقاط مثبت هستند، لذا طول رأس هم مثبت است:

a مثبت است، پس b باید منفی باشد که کل کسر مثبت شود. $\Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} > 0$



حال سراغ عرض از مبدأ سهمی می‌رویم، سهمی محور yها را پایین مبدأ قطع کرده، لذا $c < 0$ است.

مشخص کردن علامت ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم بدون حل کردن معادله

$$\Delta > 0 \begin{cases} P > 0 \xrightarrow[\text{هم‌علامت‌اند}]{\text{۲ ریشه}} \begin{cases} S > 0 & \text{هر ۲ ریشه مثبت‌اند.} \\ S < 0 & \text{هر ۲ ریشه منفی‌اند.} \end{cases} \\ P < 0 \xrightarrow[\text{مختلف‌العلامت‌اند}]{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} S > 0 & \text{ریشهٔ مثبت از قدرمطلق ریشهٔ منفی بزرگ‌تر است.} \\ S < 0 & \text{قدرمطلق ریشهٔ منفی، از ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر است.} \end{cases} \end{cases}$$

مثال: بدون حل معادله و با استفاده از Δ، S و P در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 7x - 18 = 0$ بحث کنید.

حل:

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4(1)(-18) = 121 > 0 \Rightarrow \text{معادله ۲ ریشهٔ متمایز دارد} \\ P = \frac{c}{a} = -18 < 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها مختلف‌العلامت‌اند} \\ S = \frac{-b}{a} = 7 > 0 \Rightarrow \text{ریشهٔ مثبت، از قدرمطلق ریشهٔ منفی، بزرگ‌تر است.} \end{cases}$$

معادلات گویا

معادلاتی هستند که در مخرج یک یا چند کسر خود، دارای متغیر هستند. برای حل این‌گونه معادلات، ابتدا مخرج‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم، سپس تمام جملات معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم تا به

یک معادلهٔ غیرکسری برسیم. پس از حل این معادله، دقت می‌کنیم جواب یا جواب‌ها، نباید حاصل هیچ مخرجی را در معادلهٔ اولیه به صفر تبدیل کنند.

مثال: معادلهٔ $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^۲-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$ را حل کنید.

حل:

$$\text{تجزیهٔ مخرجها}\Rightarrow\begin{cases}۲x-۲=۲(x-۱)\\x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)\\۲x+۲=۲(x+۱)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ک.م.م}=۲(x-۱)(x+۱)$$

$$\Rightarrow ۲(x-۱)(x+۱)[\frac{۲x+۳}{۲(x-۱)}-\frac{۵}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۲x-۳}{۲(x+۱)}]$$

$$\Rightarrow (x+۱)(۲x+۳)-۵\times۲=(x-۱)(۲x-۳)\Rightarrow x=۱$$

ولی $x=۱$ حداقل یکی از مخرج‌های معادلهٔ اولیه را به صفر تبدیل می‌کند؛ پس قابل قبول نبوده و می‌گوییم معادله، فاقد ریشه است.

نکته: گاهی اوقات برای یک مسئلهٔ توصیفی، معادله‌ای گویا تشکیل می‌دهیم تا مجهول یا مجهولات مسئله به دست آید. پس از حل معادله، به شرط اولیهٔ سؤال توجه کنید و ببینید آیا جواب قابل قبول است یا خیر.

مثال: می‌خواهیم یک کیک را طوری بین چند نفر تقسیم کنیم که به هر یک، مقدار مساوی برسد. اگر یک نفر دیگر به جمع آن‌ها اضافه شود و بخواهیم آن کیک را مجدداً به مقدارهای مساوی بینشان تقسیم کنیم به هر نفر به اندازهٔ $\frac{۱}{۶}$ کل کیک، کم‌تر خواهد رسید. در ابتدا آن‌ها چند نفر بوده‌اند؟

حل: اگر تعداد نفرات اولیه را x فرض کنیم می‌توانیم با تشکیل یک معادلهٔ گویا، مجهول را به دست آوریم:

$$\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x+۱}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{x+۱-x}{x(x+۱)}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

$$\Rightarrow (x+۳)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۳ & (\text{غ‌ق‌ق})\\x=۲ & (\text{ق‌ق})\end{cases}$$

عدد طلایی و مستطیل طلایی: به عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ است عدد طلایی می‌گوییم.

مستطیل طلایی، مستطیلی است که بین طول (x) و عرض (y) آن رابطهٔ $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$ برقرار باشد. حال اگر y را فرض کنیم، عدد طلایی به دست می‌آید:

$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}x^۲=x+۱\Rightarrow x^۲-x-۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۱)(-۱)=۵\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x'=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} & (\text{ق ق})\\ x''=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} & (\text{غ ق ق})\end{cases}$$

معادلات رادیکالی (گنگ)

معادلاتی هستند که در آن‌ها متغیر، زیر رادیکال قرار دارد. برای حل این‌گونه معادلات، ابتدا قسمت رادیکالی را از بقیهٔ قسمت‌ها جدا می‌کنیم، سپس طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم. (در کتاب شما فرجهٔ رادیکال‌ها، همیشه ۲ است). پس از یافتن جواب (ها) باید آن (ها) را در معادلهٔ اولیه جای‌گذاری کنیم و مطمئن شویم که دو طرف معادله با هم مساوی می‌شوند. ضمناً زیر رادیکال هم، نباید منفی شود. (گاهی لازم است عمل به توان ۲ رساندن را دو بار انجام دهیم.)

مثال: معادله‌های رادیکالی زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x+۱}+۵=x$

ب) $\sqrt{t}+۵=۰$

پ) $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}}=۵$

حل:

$$\sqrt{x+۱} = x - ۵ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x + ۱ = x^{۲} + ۲۵ - ۱۰x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{اتحاد جمله مشترک}} \Rightarrow (x-۸)(x-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ & (\text{ق ق}) \\ x = ۳ & (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

ولی $x = ۳$ قابل قبول نیست، چون اگر آن را در معادلهٔ اولیه (صورت سؤال) قرار دهیم به رابطهٔ غلط $۳ = ۷$ می‌رسیم.

ب) $\sqrt{t}$ عبارتی نامنفی است (یا صفر است یا مثبت) پس جمع آن با عدد ۵، هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر باشد، لذا این معادله، فاقد جواب است.

پ)

$$\sqrt{۱۵ + \sqrt{۲x + ۸۰}} = ۵ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۵ + \sqrt{۲x + ۸۰} = ۲۵$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲x + ۸۰} = ۱۰ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲x + ۸۰ = ۱۰۰ \Rightarrow ۲x = ۲۰$$

$$\Rightarrow x = ۱۰$$

جواب، قابل قبول است، چون در معادلهٔ اولیه، صدق می‌کند.

نکته: اگر مجموع دو عبارت نامنفی (مانند دو رادیکال با فرجهٔ زوج) برابر صفر باشد، تک‌تک آن عبارت‌ها باید صفر باشند. مثلاً می‌خواهیم معادلهٔ $\sqrt{x^{۲} - ۴} + \sqrt{۳x - ۶} = ۰$ را حل کنیم. جمع دو رادیکال با فرجهٔ زوج، صفر شده، پس تک‌تک آن‌ها باید صفر باشند:

$$\begin{cases} x^{۲} - ۴ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \\ ۳x - ۶ = ۰ \Rightarrow ۳x = ۶ \Rightarrow x = ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = ۲$$

اگر می‌خواستیم این معادله را به روش معمولی حل کنیم، باید یکی از رادیکال‌ها را به طرف راست می‌بردیم و دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رساندیم. در این صورت به جواب‌های $x = ۱$ و $x = ۲$ می‌رسیدیم که عدد ۱ رد می‌شد (در معادله صدق نمی‌کرد.)

۱ قرینه نقطه $A(-۱,۷)$ نسبت به نقطه $B(۰,۴)$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱ نقطه B وسط نقاط A و A' است، بنابراین:

$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{۲} \Rightarrow ۰ = \frac{-۱ + x_{A'}}{۲} \Rightarrow x_{A'} - ۱ = ۰ \Rightarrow x_{A'} = ۱$$
$$y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{۷ + y_{A'}}{۲} \Rightarrow y_{A'} + ۷ = ۸ \Rightarrow y_{A'} = ۱$$

بنابراین قرینه نقطه A نسبت به نقطه B ، نقطه $A'(۱,۱)$ است.

۲ قرینه نقطه $A(۴,-۱)$ نسبت به خط $x - y + ۱ = ۰$ نقطه A' است.

الف) مختصات A' را حساب کنید.

ب) فاصله خط گذرنده از AA' تا مبدأ را حساب کنید.

پاسخ: ۱ الف) ابتدا معادله خط گذرنده از A و عمود بر خط $x - y + ۱ = ۰$ را حساب می‌کنیم:

$$m = ۱ \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس می کنیم}} m' = -۱ \Rightarrow y - y_۱ = m'(x - x_۱)$$
$$\Rightarrow y + ۱ = -۱(x - ۴) \Rightarrow y + ۱ = -x + ۴ \Rightarrow x + y = ۳$$

محل برخورد دو خط را حساب می‌کنیم و این نقطه وسط A و A' است.

(A' قرینه A نسبت به خط است.)

$$\begin{cases} x + y = ۳ \\ x - y = -۱ \end{cases} \Rightarrow ۲\text{x} = ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow ۱ + y = ۳ \Rightarrow y = ۲$$

نقطه $M(۱,۲)$ وسط A و A' است.

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{۲} \Rightarrow ۱ = \frac{۴ + x_{A'}}{۲} \Rightarrow x_{A'} + ۴ = ۲ \Rightarrow x_{A'} = -۲$$
$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{-۱ + y_{A'}}{۲} \Rightarrow y_{A'} - ۱ = ۴ \Rightarrow y_{A'} = ۵$$

بنابراین $A'(-۲,۵)$ قرینه $A(۴,-۱)$ نسبت به خط $x - y + ۱ = ۰$ است.

ب) فاصله خط $x + y - ۳ = ۰$ تا مبدأ $O(۰,۰)$ برابر است با:

$$d = \frac{|۰ + ۰ - ۳|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

۳ مساحت مستطیلی که محل برخورد قطرهای آن $M(۱,۵)$ و دو ضلع آن بر خط $x+۲y=۷$ و $۲x-y+۱=۰$ قرار دارد را حساب کنید.

پاسخ: ۱ فاصله نقطه M از دو خط برابر است با نصف طول و نصف عرض که اگر آن‌ها را دو برابر کنیم، طول و عرض مستطیل به دست می‌آید.

$$d_۱=\frac{\left|۱+۱۰-۷\right|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}\Rightarrow \text{طول}=\frac{۸}{\sqrt{۵}}$$

$$d_۲=\frac{|۲-۵+۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\Rightarrow \text{عرض}=\frac{۴}{\sqrt{۵}}$$

$$\text{مساحت } S=\text{طول}\times\text{عرض}=\frac{۸}{\sqrt{۵}}\times\frac{۴}{\sqrt{۵}}=\frac{۳۲}{۵}=۶/۴$$

۴ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

الف) طول شعاع دایره‌ای به مرکز $O(۱,۲)$ که بر خط $x+۲y+۱=۰$ مماس است برابر .... می‌باشد.

ب) فاصله دو خط موازی $x+y-۱=۰$ و $۲x+۲y+۱۱=۰$ برابر .... است.

پاسخ: ۱ الف) $\frac{۶}{\sqrt{۵}}$

ب) $\frac{۱۳}{\sqrt{۸}}$

۵ نقطه $A(۳,۰)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y-x=۵$ می‌باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$\mathrm{AH}=\frac{|-۳+۰-۵|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}}\Rightarrow S=\frac{۶۴}{۲}=۳۲$$

۶ اگر $A(۲,۴)$ و $B(۴,-۲)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید.

پاسخ: ۱

$$\text{مرکز دایره } O\left|\begin{array}{l} x_o=\frac{۲+۴}{۲}=۳\\ y_o=\frac{۴+(-۲)}{۲}=۱\end{array}\right.$$

۷ دو خط ۲ $۳x - ۲y = ۲$ و $۲x + ۳y = ۱$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطه $A(۱, ۳)$ یک رأس مستطیل است. مساحت این مستطیل چقدر است؟

پاسخ: ۱ دو خط بر هم عمودند و نقطه A روی این دو خط قرار ندارد، برای به دست آوردن طول و عرض مستطیل کافیست فاصله نقطه A را از این دو خط به دست آوریم:

$$\mathrm{AH} = \frac{|۲\times۱ + ۳\times۳ - ۱|}{\sqrt{۲^۲ + ۳^۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}} \times \frac{۵}{\sqrt{۱۳}} = \frac{۵۰}{۱۳}$$

$$\mathrm{AH}' = \frac{|۳\times۱ - ۲\times۳ - ۲|}{\sqrt{۲^۲ + ۳^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۱۳}}$$

۸ مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

$$A\left|\begin{matrix}۴\\۱\end{matrix}\right., B\left|\begin{matrix}۷\\-۲\end{matrix}\right., C\left|\begin{matrix}-۱\\۵\end{matrix}\right.$$

پاسخ: ۱ از روش بند کفش استفاده می‌کنیم.

A : ۴ ۱

B : ۷ -۲

C : -۱ ۵

A : ۴ ۱

$$\text{قرمز} = -۸ + ۳۵ - ۱ = ۲۶$$

$$\text{آبی} = ۷ + ۲ + ۲۰ = ۲۹$$

$$S = \frac{۱}{۲}|۲۹ - ۲۶| = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

۹ معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB را حساب کنید.

$$A\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}۴\\۳\end{matrix}\right.$$

پاسخ: ۱

$$m_{\mathrm{AB}} = \frac{۳ - (-۱)}{۴ - ۲} = ۲ \xrightarrow{\text{شیب را قرینه و معکوس می کنیم}} m' = -\frac{۱}{۲}$$

$$M\left|\begin{matrix}\frac{۲+۴}{۲} = ۳\\ \frac{-۱+۳}{۲} = ۱\end{matrix}\right. \Rightarrow y - ۱ = \frac{-۱}{۲}(x - ۳) \Rightarrow ۲y - ۲ = -x + ۳ \Rightarrow x + ۲y - ۵ = ۰$$

۱۰ در مثلث ABC محیط مثلث را حساب کنید.

$A\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$ $\quad B\left|\begin{matrix}-۱\\۱\end{matrix}\right.$ $\quad C\left|\begin{matrix}۲\\-۱\end{matrix}\right.$

پاسخ: ۱

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۹}=۳$$
$$\mathrm{AC}=\sqrt{(۲-۲)^۲+(۱+۱)^۲}=\sqrt{۴}=۲$$
$$\mathrm{BC}=\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$
$$\text{محیط}\ P=\mathrm{AB}+\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=۳+۲+\sqrt{۱۳}=۵+\sqrt{۱۳}$$

۱۱ در مثلث ABC طول ارتفاع AH را حساب کنید.

$A\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$ $\quad B\left|\begin{matrix}-۱\\۴\end{matrix}\right.$ $\quad C\left|\begin{matrix}۷\\۰\end{matrix}\right.$

پاسخ: ۱ ۱) معادله خط BC را حساب کنیم.

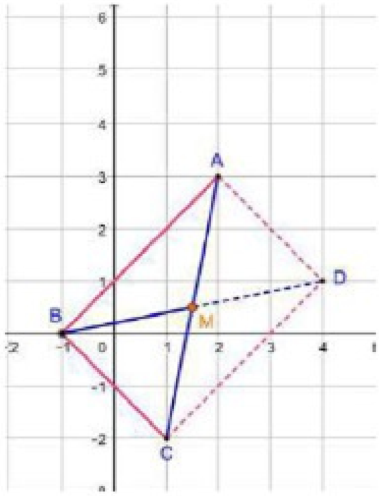
$$m_{\mathrm{BC}}=\frac{۰-۴}{۷-(-۱)}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow y-۰=\frac{-۱}{۲}(x-۷)\Rightarrow ۲y=-x+۷\Rightarrow x+۲y-۷=۰$$

۲) فاصله نقطه A تا خط BC (فرمول d)

$$d=\frac{|۲+۲-۷|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۳}{\sqrt{۵}}$$

۱۲ نقاط $A(۲,۳)$، $B(-۱,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس از مستطیل ABCD هستند. مختصات رأس چهارم آن‌را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یک‌دیگرند، آیا می‌توانید راه‌حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

پاسخ: ۱ محل برخورد قطرها را M می‌نامیم و مختصات آن‌را با داشتن مختصات دو سر پاره‌خط AC به دست می‌آوریم. حالا می‌دانیم که نقطه‌ی M وسط قطر دیگر هم هست باز به کمک فرمول می‌توانیم مختصات رأس چهارم D را بیابیم.



$$\mathrm{MA} = \mathrm{MC} \Rightarrow M\left(\frac{۲+۱}{۲}, \frac{۳+(-۲)}{۲}\right) \Rightarrow M\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$$

$$\mathrm{MB} = \mathrm{MD} \Rightarrow x_D = ۲x_M - x_B \Rightarrow x_D = ۲\times\frac{۳}{۲} - (-۱) = ۴$$

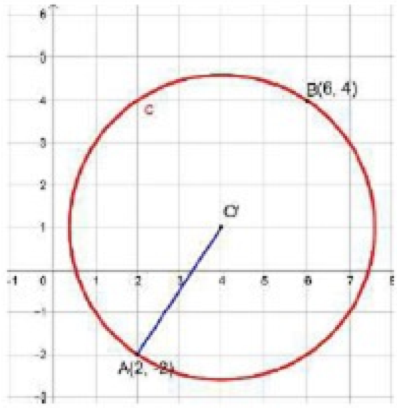
$$\Rightarrow y_D = ۲y_M - y_B \Rightarrow y_D = ۲\times\frac{۱}{۲} - ۰ = ۱ \Rightarrow D(۴,۱)$$

راه کوتاه‌تر:

$$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}} \Rightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D - ۲ = ۲ \Rightarrow x_D = ۴ \\ y_D - ۳ = -۲ \Rightarrow y_D = ۱ \end{cases} \Rightarrow D(۴,۱)$$

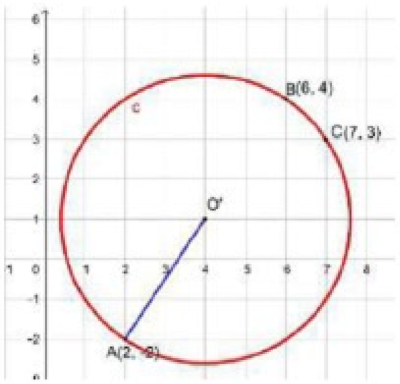
۱۳ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲, -۲)$ و $B(۶, ۴)$ هستند.
الف) اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.
ب) آیا نقطه‌ی $C(۷, ۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

پاسخ: ۱ الف) مختصات مرکز دایره نقطه وسط قطر یعنی وسط پاره‌خط AB است:



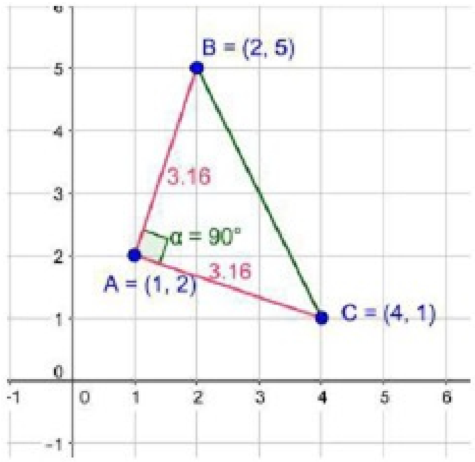
$$O'\left(\frac{۲+۶}{۲}, \frac{۴-۲}{۲}\right) \Rightarrow O'(۴, ۱)$$
$$O'A = \sqrt{(x_A - x_O)^۲ + (y_A - y_O)^۲}$$
$$\Rightarrow O'A = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

ب) C روی دایره باشد باید OC نیز برابر با طول شعاع دایره باشد:



$$O'C = \sqrt{(۴-۷)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

۱۴ نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(۱,۲)$، $B(۲,۵)$ و $C(۴,۱)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.



پاسخ: ۱

$$\left.\begin{array}{l} AB=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰} \\ AC=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}\end{array}\right\}$$

$$AB=AC$$

$$m_{AB}=\frac{۵-۲}{۲-۱}=۳,\ m_{AC}=\frac{۱-۲}{۴-۱}=-\frac{۱}{۳}$$

راه اول: $m_{AB}\times m_{AC}=۳\times-\frac{۱}{۳}=-۱$

راه دوم: $BC=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۱-۵)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}$

$$(\sqrt{۱۰})^۲+(\sqrt{۱۰})^۲=(\sqrt{۲۰})^۲\Rightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲$$

۱۵ دو نقطه‌ی $A(۱۴,۳)$ و $B(۱۰,-۱۳)$ را درنظر بگیرید. فاصله‌ی مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط AB به دست آورید.

پاسخ: ۱ اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد. پس:

$$M\left(\frac{۱۴+۱۰}{۲},\frac{۳-۱۳}{۲}\right)\Rightarrow M(۱۲,-۵)$$

فاصله‌ی مبدأ از نقطه‌ی M:

$$OM=\sqrt{۱۲^۲+(-۵)^۲}=\sqrt{۱۴۴+۲۵}=۱۳$$

۱۶ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

$\Delta: x+۲y=۰$ $\qquad T: y=۲x-۳$ $\qquad L: ۲x-y=۱$

پاسخ: ۱

$$L: ۲x-y=۱\Rightarrow m_L=۲$$

$$T: y=۲x-۳\Rightarrow m_T=۲$$

$$\Delta: x+۲y=۰\Rightarrow m_\Delta=-\frac{۱}{۲}$$

با توجه به شیب‌های خط ها: خط L موازی خط T است و خط Δ بر دو خط L و T عمود است.

۱۷ در مثلث ABC که $A(۲,۹)$ و $B(-۳,۸)$ و $C(-۱,۶)$، اگر AH ارتفاع مثلث باشد، مختصات H را به دست آورید؟

پاسخ: ۱

$$\text{BC معادله} \Rightarrow m_{BC} = -۱ \xrightarrow{C(-۱,۶)} y = -x + ۵$$

خط AH بر BC عمود است پس شیب AH قرینه و معکوس شیب BC است.

$$\text{AH معادله} \Rightarrow m_{AH} = ۱ \xrightarrow{A(۲,۹)} y = x + ۷$$

$$H \text{ مختصات} \Rightarrow -x + ۵ = x + ۷ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow y = ۶$$

$$H(-۱,۶)$$

۱۸ دو خط به معادله‌های $۲x + ۳y = ۵$ و $ax - ۲y = ۳$ را درنظر بگیرید. a را طوری بیابید که:

الف) این دو خط با هم موازی باشند.

ب) این دو خط بر هم عمود باشند.

پاسخ: ۱

$$L_۱ : ۲x + ۳y = ۵ \Rightarrow ۳y = -۲x + ۵ \Rightarrow y = -\frac{۲}{۳}x + \frac{۵}{۳} \Rightarrow m_۱ = -\frac{۲}{۳}$$

$$L_۲ : ax - ۲y = ۳ \Rightarrow -۲y = -ax + ۳ \Rightarrow y = \frac{a}{۲}x - \frac{۳}{۲} \Rightarrow m_۲ = \frac{a}{۲}$$

الف) باید شیب‌های $L_۲, L_۱$ با هم برابر باشد تا این دو خط با هم موازی باشند:

$$m_۱ = m_۲ \Rightarrow -\frac{۲}{۳} = \frac{a}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۴}{۳}$$

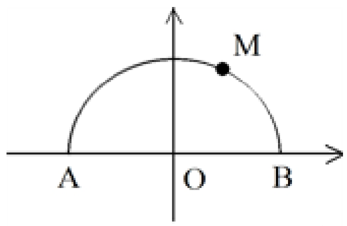
ب) باید حاصل‌ضرب شیب‌های $L_۲, L_۱$ برابر (-۱) باشد تا این دو خط بر هم عمود باشند:

$$m_۱ . m_۲ = -۱ \Rightarrow \left(-\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{a}{۲}\right) = -۱ \Rightarrow \frac{a}{۳} = ۱ \Rightarrow a = ۳$$

۱۹ نقطه‌ی $M(x,۴)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر قرار دارد.

الف) طول نقطه M را بیابید.

ب) نشان دهید مثلث AMB قائم‌الزاویه است.



پاسخ: ۱ الف)

$$\text{OM} = \text{OB} \Rightarrow \sqrt{x^۲ + ۱۶} = ۵ \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم۲}} x^۲ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = ۳$$

ب)

$$\begin{cases} A(-۵,۰) \\ M(۳,۴) \end{cases} \Rightarrow m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{۴ - ۰}{۳ - (-۵)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} B(۵,۰) \\ M(۳,۴) \end{cases} \Rightarrow m_{MB} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{۴ - ۰}{۳ - ۵} = \frac{۴}{-۲} = -۲$$

از آن‌جا که شیب AM و شیب MB قرینه و معکوس یک‌دیگر هستند، بنابراین دو پاره‌خط بر هم عمود هستند مثلث AMB قائم‌الزاویه است.

۲۰ محیط دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $A(۱,۲)$ و بر خط گذرنده از $B(۱,-۱)$ و $C(۲,۴)$ مماس باشد.

پاسخ: ۱ ابتدا باید معادله‌ی خط گذرنده از B و C را حساب کنیم.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴-(-۱)}{۲-۱} = ۵ \Rightarrow y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y + ۱ = ۵(x-۱)$$

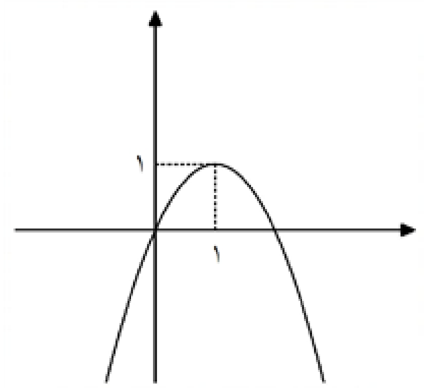
$$\Rightarrow y = ۵x - ۶ \Rightarrow ۵x - y - ۶ = ۰$$

باید فاصله خط $۵x - y - ۶ = ۰$ تا نقطه ی $A(۱,۲)$ که مرکز دایره است را حساب کنیم که جواب آن شعاع دایره است.

$$d = \frac{|\mathrm{ax}_۱ + \mathrm{by}_۱ + \mathrm{c}|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۵-۲-۶|}{\sqrt{۲۵+۱}} = \frac{۳}{\sqrt{۲۶}}$$

$$\text{محیط } P = ۲\pi \mathrm{r} = ۲\pi \times \frac{۳}{\sqrt{۲۶}} \times \frac{\sqrt{۲۶}}{\sqrt{۲۶}} = \frac{۶\sqrt{۲۶}\pi}{۲۶} = \frac{۳\sqrt{۲۶}\pi}{۱۳}$$

۲۱ معادله سهمی زیر را بنویسید.



پاسخ: ۱ در سهمی داده شده رأس سهمی معلوم است. بنابراین از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$y = a(x-h)^۲ + k \Rightarrow y = a(x-۱)^۲ + ۱$$

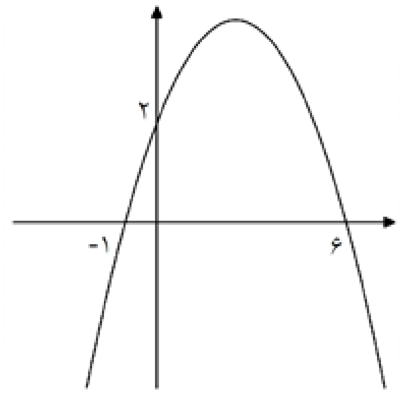
سهمی محور y ها را در نقطه $o(۰,۰)$ قطع می‌کند. بنابراین داریم:

$$o(۰,۰) \Rightarrow ۰ = a(۰-۱)^۲ + ۱ \Rightarrow ۰ = a + ۱ \Rightarrow a = -۱$$

$$y = -(x-۱)^۲ + ۱ \Rightarrow y = -(x^۲ - ۲\mathrm{x} + ۱) + ۱ \Rightarrow y = -x^۲ + ۲\mathrm{x} - ۱ + ۱$$

$$\Rightarrow y = -x^۲ + ۲\mathrm{x}$$

۲۲ معادله سهمی زیر را بنویسید.



پاسخ: ۱ در نمودار محل برخورد با محور x ها معلوم است. بنابراین از ضابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow y = a(x + 1)(x - 6)$$

سهمی محور y ها را در نقطه $A(0,2)$ قطع کرده است. بنابراین:

$$A(0,2) \Rightarrow 2 = a(0+1)(0-6) \Rightarrow 2 = -6a \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}(x+1)(x-6) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}(x^2 - 5x - 6) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2$$

۲۳ مقدار k را چنان بیابید که ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 13x + 7k + 1 = 0$ برابر ۳۶ باشد. سپس ریشه‌های معادله را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{7k+1}{1} = 36 \Rightarrow 7k = 35 \Rightarrow k = 5$$

$$\xrightarrow{k=5} x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

۲۴ اگر ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 22)x + a + b + 3 = 0$ ، a و b باشند و a و b دو عدد طبیعی باشند $a + b$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} S = a^2 + b^2 - 22 \Rightarrow S = S^2 - 2p - 22 \\ p = a + b + 3 \Rightarrow p = S + 3 \end{cases}$$

$$S = S^2 - 2p - 22 \xrightarrow{p=S+3} S = S^2 - 2(S+3) - 22 \Rightarrow S^2 - 3S - 28 = 0$$

$$\Rightarrow (S-7)(S+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = 7 \text{ ق ق} \\ S = -4 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

چون دو ریشه اعداد طبیعی هستند بنابراین $S = a + b = 7$ قابل قبول است.

۲۵ اگر $x=-۲$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^۳+mx^۲-۱۱x-۳۰$ باشد:

الف) مقدار m را حساب کنید.

ب) صفرهای دیگر تابع را حساب کنید.

پاسخ: ۱ الف) باید به جای x عدد ۲- قرار دهیم و برابر صفر می‌گذاریم.

$$\xrightarrow{x=-۲} -۸+۴m+۲۲-۳۰=۰ \Rightarrow ۴m=۱۶ \Rightarrow m=۴$$

ب)

$$f(x)=x^۳+۴x^۲-۱۱x-۳۰$$

بر عامل صفر یعنی $x+۲$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳+۴x^۲-۱۱x-۳۰ & x+۲ \\ \cline{2-2} x^۳+۲x^۲ & x^۲+۲x-۱۵ \\ \hline \quad ۲x^۲-۱۱x-۳۰ & \\ \quad ۲x^۲+۴x & \\ \hline \quad\quad -۱۵x-۳۰ & \\ \quad\quad -۱۵x-۳۰ & \\ \hline \quad\quad\quad ۰ & \end{array}$$

$$x^۲+۲x-۱۵=۰ \Rightarrow (x+۵)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۵ \\ x=۳ \end{cases}$$

بنابراین صفرهای دیگر تابع ۵- و ۳ است.

۲۶ در معادلهٔ $x^۲-۳x-۱=۰$ اگر α و β ریشه‌ها باشند، بدون یافتن ریشه‌ها $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۳ \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۱ \end{cases}$$

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{۳}{-۱}=-۳$$

۲۷ در معادلهٔ $x^۲-x-۵=۰$ اگر α و β ریشه‌ها باشند، بدون یافتن ریشه‌ها $\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=۱ \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۵ \end{cases}$$

$$\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-۵\times۱=-۵$$

۲۸ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^۲ - x - ۱ = ۰$ باشد حاصل عبارت $\alpha^۲ + \frac{۱}{\beta}$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$x^۲ - x - ۱ = ۰ \begin{cases} \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^۲ - \alpha - ۱ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ = \alpha + ۱ \\ \xrightarrow{x=\beta} \beta^۲ - \beta = ۱ \xrightarrow{\div\beta} \beta - ۱ = \frac{۱}{\beta} \end{cases}$$

$$\alpha^۲ + \frac{۱}{\beta} = \alpha + ۱ + \beta - ۱ = \overbrace{\alpha + \beta}^{S} = ۱$$

۲۹ اگر α یکی از ریشه‌های معادله $x^۲ + ۴x - ۲ = ۰$ باشد حاصل عبارت $(\alpha + ۱)(\alpha - ۲)(\alpha + ۴)$ را بیابید.

پاسخ: ۱

$$\text{ریشه معادله } \alpha \Rightarrow x^۲ + ۴x - ۲ = ۰ \xrightarrow{x=\alpha} \alpha^۲ + ۴\alpha - ۲ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ + ۴\alpha = ۲$$

$$(\alpha + ۱)(\alpha + ۴) = \alpha^۲ + ۵\alpha + ۴ = \overbrace{\alpha^۲ + ۴\alpha}^{۲} + \alpha + ۴ = \alpha + ۶$$

$$(\alpha + ۱)(\alpha + ۴)(\alpha - ۲) = (\alpha + ۶)(\alpha - ۲) = \alpha^۲ + ۴\alpha - ۱۲ = ۲ - ۱۲ = -۱۰$$

۳۰ اگر α و β ریشه‌های معادله $۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ باشند حاصل عبارت $۲\alpha^۲ + ۳\alpha - \beta^۲ + ۷\beta$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$S = \alpha + \beta = \frac{۴}{۳}$$

$$P = \alpha.\beta = -\frac{۱}{۳}$$

$$\text{ریشه معادله } \alpha \Rightarrow ۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \xrightarrow{x=\alpha} ۳\alpha^۲ - ۴\alpha - ۱ = ۰ \Rightarrow ۳\alpha^۲ - ۴\alpha = ۱$$

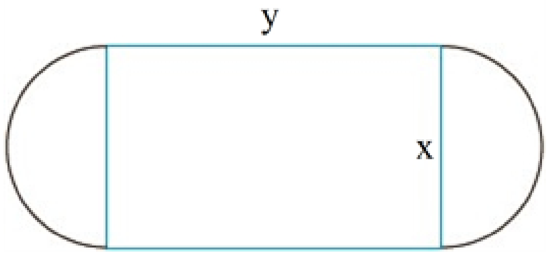
$$۲\alpha^۲ + ۳\alpha - \beta^۲ + ۷\beta = ۳\alpha^۲ - \alpha^۲ + ۷\alpha - ۴\alpha + ۷\beta - \beta^۲$$

$$= (۳\alpha^۲ - ۴\alpha) - (\alpha^۲ + \beta^۲) + ۷(\alpha + \beta) = ۱ - \frac{۲۲}{۹} + \frac{۲۸}{۳} = \frac{۹ - ۲۲ + ۸۴}{۹} = \frac{۷۱}{۹}$$

۳۱ استادیومی به شکل مقابل در حال ساخت است که در آن $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ و نیم‌دایره‌ها به شعاع $\frac{x}{۲}$ هستند. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، x و y را طوری بیابید که:

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

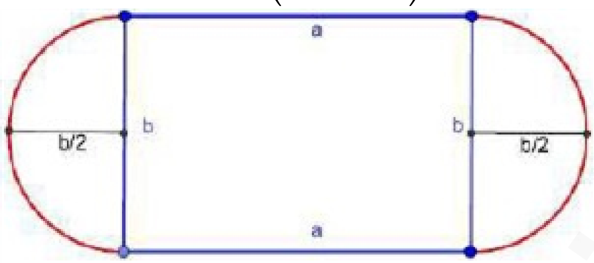


پاسخ: ۱

الف) $P = P_O + ۲a \Rightarrow P = ۲\pi \times \frac{b}{۲} + ۲a \Rightarrow \pi b + ۲a = ۱۵۰۰ \Rightarrow a = ۷۵۰ - \frac{\pi}{۲} b$

$-\frac{\pi}{۲} < ۰$ دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و نقطه‌ی ماکزیمم دارد

$$S_{\square} = ab \Rightarrow S_{\square} = \left(۷۵۰ - \frac{\pi}{۲} b\right) b \Rightarrow S_{\square} = -\frac{\pi}{۲} b^{۲} + ۷۵۰b \Rightarrow b = -\frac{۷۵۰}{۲\left(-\frac{\pi}{۲}\right)} = \frac{۷۵۰}{\pi}$$



$$\xrightarrow{\pi=۳} b = ۲۵۰m, a = ۷۵۰ - \frac{\pi}{۲} \times \frac{۷۵۰}{\pi} = ۳۷۵m$$

$$S_{\square} = ۲۵۰ \times ۳۷۵ = ۹۳۷۵۰m^{۲}, S = S_{\square} + S_{\bigcirc} = ۹۳۷۵۰ + ۳(۱۲۵)^{۲} = ۱۴۰۶۲۵$$

ب) $a = ۷۵۰ - \frac{\pi}{۲} b$

$-\frac{\pi}{۴} < ۰$ دهانه‌ی سهمی رو به پایین است و نقطه‌ی ماکزیمم دارد

$$S = S_{\square} + S_{\bigcirc} \Rightarrow S = -\frac{\pi}{۲} b^{۲} + ۷۵۰b + \left(\frac{b}{۲}\right)^{۲} \pi \Rightarrow S = -\frac{\pi}{۴} b^{۲} + ۷۵۰b$$

$$b = \frac{-۷۵۰}{۲\left(-\frac{\pi}{۴}\right)} = \frac{۱۵۰۰}{\pi} \Rightarrow a = ۷۵۰ - \frac{\pi}{۲} \times \frac{۱۵۰۰}{\pi} = ۰$$

$$S = ۳ \times (۲۵۰)^{۲} = ۱۸۷۵۰۰m^{۲}$$

۳۲ موشکی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله‌ی آن به صورت مقابل است. $h(t) = ۱۰۰t - ۵t^۲ \ (t \geq ۰)$

الف) چه‌قدر طول می‌کشد تا موشک به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه‌ی اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، موشک به زمین بازمی‌گردد؟

پاسخ: ۱

الف) $h(t) = -۵t^۲ + ۱۰۰t \Rightarrow a = -۵ < ۰$ دهانه‌ی سهمی رو به پایین و نقطه‌ی ماکزیمم دارد

$t = -\frac{b}{۲a} \Rightarrow t = -\frac{۱۰۰}{۲(-۵)} \Rightarrow t = ۱۰s$ پس از ۱۰ ثانیه به بالاترین ارتفاع می‌رسد.

ب) $h(۱۰) = -۵\times۱۰۰ + ۱۰۰\times۱۰ = ۵۰۰m$ ارتفاع نقطه‌ی اوج

$h(t) = ۰ \Rightarrow -۵t + ۱۰۰t = ۰ \Rightarrow t(-۵t + ۱۰۰) = ۰$

$\Rightarrow t = ۰s, t = ۲۰s$ پس از ۲۰ ثانیه موشک به زمین بازمی‌گردد.

نکته: $t = ۰$ لحظه‌ی شروع پرتاب است.

۳۳ معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{۲} - ۱$ و $\sqrt{۲} + ۱$ باشد.

پاسخ: ۱

$\alpha = ۱ - \sqrt{۲}, \beta = ۱ + \sqrt{۲}$

$S = \alpha + \beta \Rightarrow S = ۱ - \sqrt{۲} + ۱ + \sqrt{۲} = ۲, P = \alpha.\beta = (۱ - \sqrt{۲})(۱ + \sqrt{۲}) = -۱$

$x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$

۳۴ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^۴ - ۸x^۲ + ۸ = ۰$ ب) $۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳$

پاسخ: ۱

الف) $x^۴ - ۸x^۲ + ۸ = ۰$

$x^۲ = u \Rightarrow u^۲ - ۸u + ۸ = ۰$

$\Delta = ۳۲ \Rightarrow u = \frac{۸ \pm ۴\sqrt{۲}}{۲}$

$u = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۴ + ۲\sqrt{۲}}$

$u = ۴ - ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$

ب) $۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳$

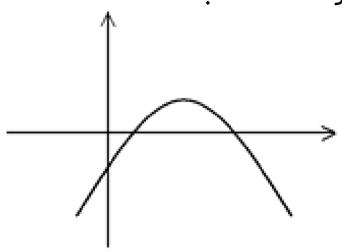
$x^۳ = u \Rightarrow ۴u^۲ - ۵u + ۱ = ۰$

$\Delta = ۹ \Rightarrow u = \frac{۵ \pm ۳}{۸}$

$u = ۱ \Rightarrow x^۳ = ۱ \Rightarrow x = ۱$

$u = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۳ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}} = \frac{\sqrt[۳]{۲}}{۴}$

۳۵ اگر نمودار تابع $f(x) = \mathrm{m}x^۲ + ۸x - ۲$ به صورت زیر باشد، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.



پاسخ: ۱

دهانه رو به پایین $\Rightarrow m < ۰ \ (۱)$

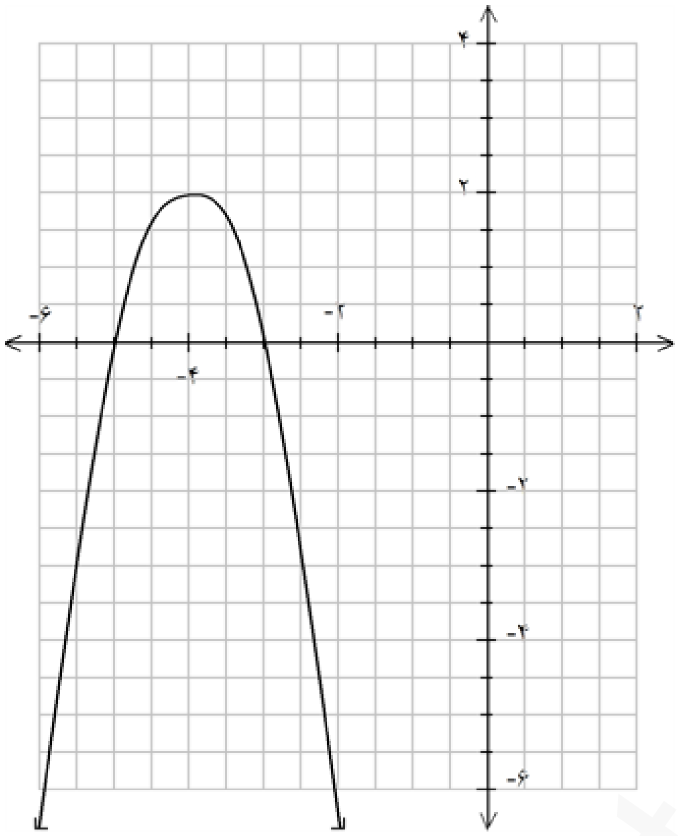
تابع دارای ۲ صفر است $\Rightarrow \Delta > ۰ \Rightarrow ۶۴ + ۸m > ۰ \Rightarrow m > -۸ \ (۲)$

طول رأس مثبت است $\Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} > ۰ \Rightarrow -\frac{۸}{۲m} > ۰ \Rightarrow m < ۰ \ (۳)$

$۱ \cap ۲ \cap ۳ \Rightarrow m \in (-۸, ۰) \Rightarrow$ m می‌تواند دارای ۷ مقدار صحیح باشد

۳۶ سهمی زیر را رسم کنید و معادله محور تقارن را بنویسید. $y = -۲(x+۴)^۲ + ۲$

پاسخ: ۱ محور تقارن: $x = -۴$



۳۷ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(۱, -۲)$ و $(۲, -۳)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن‌را رسم کنید و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

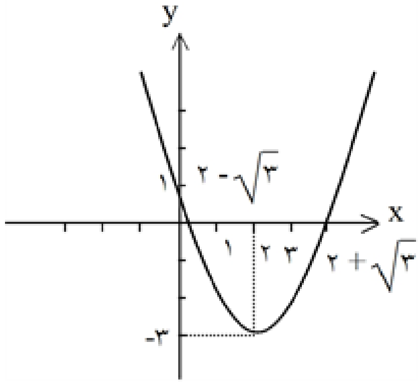
پاسخ: ۱

$$y = ax^۲ + bx + c \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -۲ \\ ۴a + ۲b + c = -۳ \\ c = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -۳ \\ ۴a + ۲b = -۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = -۴$$

$$y = x^۲ - ۴x + ۱$$

x	۱	۲	۳	۰	$۲-\sqrt{۳}$	$۲+\sqrt{۳}$
y	-۲	-۳	-۲	۱	۰	۰



$$D_f = R, R_f = [-۳, +\infty)$$

۳۸ صفرهای تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = (x^۲ - ۱)^۲ + (x^۲ - ۱) - ۲$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱

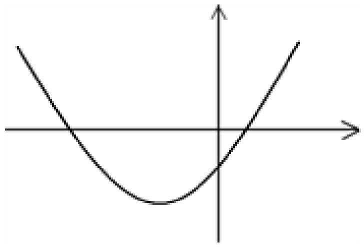
$$(x^۲ - ۱)^۲ + (x^۲ - ۱) - ۲ = ۰ \quad (x^۲ - ۱) = t \Rightarrow t^۲ + t - ۲ = ۰ \; (۰/۲۵)$$

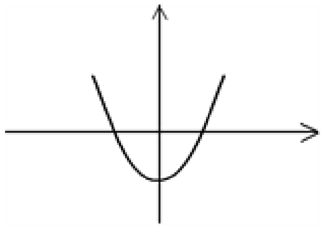
$$(t + ۲)(t - ۱) = ۰ \begin{cases} t = -۲ \Rightarrow x^۲ - ۱ = -۲ \Rightarrow x^۲ = -۱ \quad \text{غ.ق.ق} \\ t = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲} \end{cases}$$

(۰/۵) (۰/۲۵)

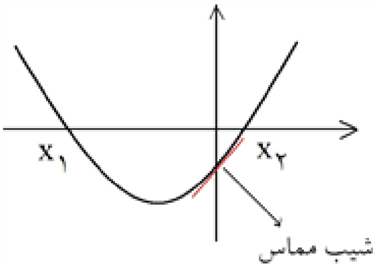
۳۹) جدول زیر را کامل کنید. (علامت a و b و c و Δ را مشخص کنید.)

نمودار	a	b	c	Δ	تعداد ریشه
۱					
۲					

۱) 

۲) 

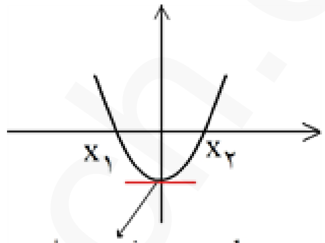
پاسخ: ۱

۱) 

شیب مماس $> \cdot \Rightarrow b > \cdot$

$a > \cdot \ , \ c < \cdot$

دو ریشه دارد $\Leftarrow \Delta > \cdot$

۲) 

شیب مماس $= \cdot \Rightarrow b = \cdot$

$a > \cdot \ , \ c < \cdot$

دو ریشه دارد $\Rightarrow \Delta > \cdot$

نمودار	a	b	c	Δ	تعداد ریشه
۱	+	+	-	+	۲
۲	+	صفر	-	+	۲

۴۰) دو عدد مثبت را چنان بیابید که مجموع اولی با دو برابر دومی برابر ۲۴ و حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم شود.

پاسخ: ۱

$x + ۲y = ۲۴$

$x = ۲۴ - ۲y$

$xy = (۲۴ - ۲y)y = -۲y^۲ + ۲۴y$

$y = \frac{-۲۴}{-۴} = ۶ \Rightarrow x = ۱۲$

۴۱) اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ + ۲(k-۱)x + ۸ = ۰$ دو برابر ریشه‌ی دیگر باشد، مقدار عددی k را حساب کنید. (ریشه‌ها مثبت هستند.)

پاسخ: ۱

$\alpha \times ۲\alpha = ۸ \Rightarrow ۲\alpha^۲ = ۸ \Rightarrow \alpha^۲ = ۴ \Rightarrow \alpha = ۲, ۲\alpha = ۴$

$S = ۶ = -۲(k-۱) \Rightarrow k - ۱ = -۳ \Rightarrow k = -۲$

۴۲ در معادلهٔ $x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ بدون یافتن ریشه‌ها مقادیر زیر را حساب کنید. (α و β ریشه‌ها هستند.)

۱) $\alpha^۳ + \beta^۳$

۲) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

پاسخ: ۱

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۵$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = ۱$$

$$۱)\ \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha + \beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha + \beta) = ۱۲۵ - ۱۵ = ۱۱۰$$

$$۲)\ \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = t \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم۲}} \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta} = t^۲ \Rightarrow ۵ + ۲ = t^۲ \Rightarrow t = \sqrt{۷}$$

۴۳ در معادلهٔ $x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ بدون یافتن ریشه‌ها مقادیر زیر را حساب کنید؟ (α و β ریشه‌ها هستند.)

۱) $\alpha^۲ + \beta^۲$

۲) $\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}$

پاسخ: ۱

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۵$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = ۱$$

$$۱)\ \alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta = ۲۵ - ۲ = ۲۳$$

$$۲)\ \frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{۵}{۱} = ۵$$

۴۴ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۴x^۲ - ۵x - ۵ = ۰$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن ۲α و ۲β باشد.

پاسخ: ۱

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{۵}{۴} \qquad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{۵}{۴}$$

$$S_{\text{جدید}} = ۲\alpha + ۲\beta = ۲(\alpha + \beta) = ۲\left(\frac{۵}{۴}\right) = \frac{۵}{۲}$$

$$P_{\text{جدید}} = (۲\alpha)(۲\beta) = ۴\alpha\beta = ۴\left(-\frac{۵}{۴}\right) = -۵$$

معادلهٔ جدید : $x^۲ - S_{\text{جدید}}x + P_{\text{جدید}} = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۵}{۲}x - ۵ = ۰$

۴۵ در معادله‌ی $۲x^۲-۸x+m=۰$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگ‌تر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید.

پاسخ: ۱

$\alpha=۲+\beta\ ,S=۴$ ۰/۲۵

$S=\alpha+\beta=۲+۲\beta$ ۰/۲۵ $\Rightarrow ۴=۲+۲\beta \Rightarrow \beta=۱$ ۰/۲۵ $\Rightarrow \alpha=۳$ ۰/۲۵, $m=۶$ ۰/۲۵

۴۶ معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{x-۴}{x+۲}=\frac{x-۶}{x+۲}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{x-۴}{x+۲}=\frac{x-۶}{x+۲}\xrightarrow{\times(x-۱)(x+۲)}(x+۱)(x+۲)+(x-۴)(x-۱)=(x-۶)(x-۱)$$

$$\Rightarrow x^۲+۳x+۲+x^۲-۵x+۴=x^۲-۷x+۶$$

$$\Rightarrow x^۲+۵x=۰\Rightarrow x(x+۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ \text{ ق ق}\\ x=-۵ \text{ ق ق}\end{cases}$$

۴۷ معادله $۲x=۱-\sqrt{۲-x}$ را حل کنید.

پاسخ: ۱

$$(۲x-۱)^۲=(-\sqrt{۲-x})^۲\Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱=۲-x\Rightarrow ۴x^۲-۳x-۱=۰$$

$$\Rightarrow x_۱=۱ \text{ غیرقابل قبول}, x_۲=\frac{-۱}{۴}$$

۴۸ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x+۱}=x-۱$

ب) $\dfrac{۱}{x^۲-۴}=\dfrac{۱}{x+۲}+\dfrac{۳}{x-۲}$

پاسخ: ۱

الف) $\sqrt{x+۱}=x-۱\xrightarrow{\text{به توان می رسانیم۲}}x+۱=x^۲-۲x+۱$

$$\Rightarrow x^۲-۳x=۰\Rightarrow x(x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ \text{ غ ق ق}\\ x=۳ \text{ ق ق}\end{cases}$$

ب) $\dfrac{۱}{x^۲-۴}=\dfrac{۱}{x+۲}+\dfrac{۳}{x-۲}\xrightarrow{\times(x-۲)(x+۲)}۱=x-۲+۳(x+۲)$

$$\Rightarrow x-۲+۳x+۶=۱\Rightarrow ۴x=-۳\Rightarrow x=-\frac{۳}{۴} \text{ ق ق}$$

۴۹ یک قایق با سرعت ۱۰ متر بر دقیقه در آب راکد حرکت می‌کند. اگر فاصله ۹۶ متری یک رودخانه را رفته و برگشت کند و اختلاف زمان رفت و برگشت ۴ دقیقه باشد، سرعت آب رودخانه را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$x(\text{مسافت طی شده}) = V(\text{سرعت}).t(\text{زمان}) \Rightarrow t = \frac{x}{V}$$

$$t_{\text{رفت}} - t_{\text{برگشت}} = ۴ \Rightarrow \frac{۹۶}{۱۰ - V} - \frac{۹۶}{۱۰ + V} = ۴ \xrightarrow{\div ۴} \frac{۲۴}{۱۰ - V} - \frac{۲۴}{۱۰ + V} = ۱$$

$$\xrightarrow{\times(۱۰-V)(۱۰+V)} ۲۴(۱۰ + V) - ۲۴(۱۰ - V) = ۱۰۰ - V^۲ \Rightarrow \cancel{۲۴۰} + ۲۴V - \cancel{۲۴۰} + ۲۴V$$

$$= ۱۰۰ - V^۲ \Rightarrow V^۲ + ۴۸V - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow (V + ۵۰)(V - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} V = ۲ \ \text{ق ق} \\ V = -۵۰ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۵۰ علی یک کار را در ۱۰ روز انجام می‌دهد و همین کار را به کمک رضا در ۴ روز انجام می‌دهد. رضا به تنهایی این کار را در چند روز انجام می‌دهد؟

پاسخ: ۱

	کل کار	مقدار کار در یک روز
علی	۱۰	$\frac{۱}{۱۰}$
رضا	x	$\frac{۱}{x}$
علی و رضا	۴	$\frac{۱}{۴}$

مقدار کار انجام شده توسط رضا در یک روز + مقدار کار انجام شده توسط علی در یک روز

= مقدار کار انجام شده توسط رضا و علی

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{x} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{x + ۱۰}{\cancel{۱۰}_{۵}\, x} = \frac{۱}{\cancel{۴}_{۲}} \Rightarrow ۵x = ۲x + ۲۰ \Rightarrow ۳x = ۲۰ \Rightarrow x = \frac{۲۰}{۳}$$

۵۱ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله‌ی ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

پاسخ: ۱ زمانی که علی برای ۱۶ صفحه صرف می‌کند: ۲ ساعت یا ۱۲۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه $\frac{۱۶}{۱۲۰}$ صفحه ویرایش می‌کند.

زمانی که علی و رضا با هم صرف ویرایش ۱۶ صفحه می‌کنند: ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه یعنی ۸۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه با هم $\frac{۱۶}{۸۰}$ صفحه ویرایش می‌کنند.

اگر زمانی را که رضا صرف ویرایش ۱۶ صفحه به تنهایی می‌کند x درنظر بگیریم پس در یک دقیقه $\frac{۱۶}{x}$ صفحه ویرایش می‌کند. پس داریم:

$$\frac{۱۶}{۱۲۰}+\frac{۱۶}{x}=\frac{۱۶}{۸۰}\Rightarrow\frac{۱}{۱۲۰}+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۸۰}\Rightarrow ۲۴۰x\times\frac{۱}{۱۲۰}+۲۴۰x\times\frac{۱}{x}=۲۴۰x\times\frac{۱}{۸۰}$$

$$۲x+۲۴۰=۳x\Rightarrow x=۲۴۰$$

۵۲ در یک مستطیل با طول L و عرض W، اگر داشته باشیم $\frac{L}{W+L}=\frac{W}{L}$، آن‌گاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است. اگر محیط یک زمین مستطیل شکل ۳۲۰ متر باشد و طول و عرض متناسب با نسبت طلایی باشند، عرض و طول زمین چه‌قدر است؟

پاسخ: ۱

$$۲(L+W)=۳۲۰$$

$$L+W=۱۶۰\Rightarrow W=۱۶۰-L$$

از سوی دیگر $\frac{L}{W+L}=\frac{W}{L}\Longleftarrow$ با جایگذاری

$$\frac{۱۶۰-L}{L}=\frac{L}{۱۶۰}\Rightarrow(۱۶۰)^۲-۱۶۰L=L^۲$$

$$L^۲+۱۶۰L-(۱۶۰)^۲=۰$$

$$\begin{cases}L=\frac{-۱۶۰+\sqrt{۱۲۸۰۰۰}}{۲}=-۸۰+\frac{\sqrt{۱۲۸۰۰۰}}{۲}=۸۰(\sqrt{۵}-۱)\\ L=\frac{-۱۶۰-\sqrt{۱۲۸۰۰۰}}{۲}=\text{جواب منفی غیرقابل قبول است}\end{cases}$$

$$L=۸۰(\sqrt{۵}-۱)$$

$$W=۱۶۰-L=۱۶۰-۸۰(\sqrt{۵}-۱)=۸۰(۳-\sqrt{۵})$$

۵۳ اگر $x=5$ یکی از ریشه‌های معادله گویای $\frac{k}{x}-\frac{12}{x-3}=-4$ باشد، k را یافته و سپس ریشه دیگر را به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$\frac{k}{5}-\frac{12}{2}=-4 \Rightarrow \frac{k}{5}=2 \Rightarrow k=10$$

$$\frac{10}{x}-\frac{12}{x-3}=-4 \Rightarrow 10(x-3)-12x=-4x(x-3)$$

$$10x-30-12x=-4x^2+12x$$

$$4x^2-14x-30=0 \Rightarrow x=5,\ x=\frac{-3}{2}$$

۵۴ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=5$

ب) $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+1}=2$

پاسخ: ۱

الف) $x-2+x=5x(x-2) \Rightarrow 5x^2-12x+2=0 \Rightarrow x=\frac{6+\sqrt{26}}{5}$ و $\frac{6-\sqrt{26}}{5}$

ب) $\sqrt{2x+9}=2+\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} 2x+9=4+x+1+4\sqrt{x+1}$

$$\Rightarrow x+4=4\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x^2+8x+16=16x+16$$

$$\Rightarrow x^2-8x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ق ق} \\ x=8 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۵۵ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{8x+6}{x^2+x-6}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-3}{x+3}=\frac{8x+6}{x^2+x-6} \Rightarrow \frac{(x+2)(x+3)+(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+3)}=\frac{8x+6}{x^2+x-6}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+5x+6+x^2-5x+6}{x^2+x-6}=\frac{8x+6}{x^2+x-6} \Rightarrow 2x^2+12=8x+6 \Rightarrow 2x^2-8x+6=0$$

$$\Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ق ق} \\ x=3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۵۶ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{x-۳}+\sqrt{۵x+۲}+۲=۰$

ب) $\dfrac{۶x}{x-۱}+\dfrac{x-۱}{۳x}=۳$

پاسخ: ۱

الف) $\underbrace{\sqrt{x-۳}}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{\sqrt{۵x+۲}}_{\text{نامنفی}}+\underbrace{۲}_{\text{مثبت}}=۰$

جمع دو عبارت نامنفی و یک عدد مثبت، هیچ‌گاه نمی‌تواند برابر صفر شود، پس این معادله جواب ندارد.

ب) $\dfrac{۶x}{x-۱}+\dfrac{x-۱}{۳x}=۳ \xrightarrow[۳x(x-۱)]{\text{ضرب تمام جملات در}} ۶x(۳x)+(x-۱)(x-۱)$

$=۳(۳x)(x-۱) \Rightarrow ۱۸x^۲+x^۲-۲x+۱=۹x^۲-۹x \Rightarrow ۱۰x^۲+۷x+۱=۰$

$\Delta=b^۲-۴ac=۷^۲-۴(۱۰)(۱)=۹ \Rightarrow x=\dfrac{-۷\pm\sqrt{۹}}{۲۰}=\dfrac{-۷\pm ۳}{۲۰} \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{-۷+۳}{۲۰}=\frac{-۱}{۵} \\ x''=\frac{-۷-۳}{۲۰}=\frac{-۱}{۲} \end{cases}$

هر دو جواب قابل قبول‌اند، چون هیچ مخرجی را صفر نمی‌کنند.

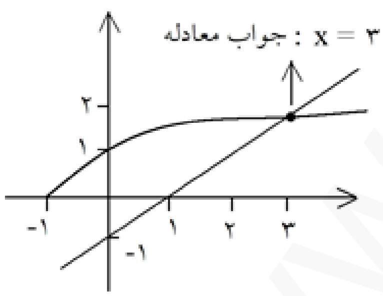
۵۷ معادله‌ی $\sqrt{x+۱}=x-۱$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

پاسخ: ۱ حل جبری:

$\sqrt{x+۱}=x-۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+۱=x^۲-۲x+۱ \Rightarrow x^۲-۳x=۰ \Rightarrow x(x-۳)=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ & (\text{غ ق ق}) \\ x=۳ & (\text{ق ق}) \end{cases}$

حل هندسی:



$y_۱=\sqrt{x+۱}$

x	-۱	۰	۳
y	۰	۱	۲

$y_۲=x-۱$

x	۰	۱	۳
y	-۱	۰	۲

۵۸ حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a+۵}{a-۱}-\frac{۶}{a^۲+a+۱}-\frac{۶(a^۲+۲)}{a^۳-۱}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{a+۵}{a-۱}-\frac{۶}{a^۲+a+۱}-\frac{۶(a^۲+۲)}{(a-۱)(a^۲+a+۱)} \quad (۰/۲۵)$$

$$=\frac{(a+۵)(a^۲+a+۱)-۶(a-۱)-۶a^۲-۱۲}{(a-۱)(a^۲+a+۱)}=(۰/۵)\frac{a^۳-۱}{(a-۱)(a^۲+a+۱)}=۱ \quad (۰/۲۵)$$

مثال صفحه ۱۴

۵۹ زمینی مستطیل شکل داریم که ابعاد آن در نسبت طلایی صدق می‌کند. اگر عرض این زمین ۲ متر باشد، طول آن چه‌قدر است؟

پاسخ: ۱ مثال حل شده کتاب صفحه ۸۱

$$\frac{W}{L}=\frac{L}{W+L}(۰/۲۵)\Rightarrow\frac{۲}{L}=\frac{L}{۲+L}\ (۰/۲۵)\Rightarrow L^۲-۲L-۴=۰\ (۰/۲۵)$$

$$\Delta=۴+۱۶=۲۰(۰/۲۵)\Rightarrow L=\frac{۲\pm\sqrt{۲۰}}{۲}\Rightarrow L_۱=\frac{۲+\sqrt{۲۰}}{۲}\ (۰/۲۵)$$

۶۰ معادله $۲\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}=۳$ را حل کنید.

پاسخ: ۱ صفحه ۷۴ کتاب

$$\sqrt{x}\left(۲\sqrt{x}+\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)=۳\times\sqrt{x}\ (۰/۲۵)\Rightarrow ۲x+۱=۳\sqrt{x}\quad(۰/۲۵)$$

$$(۲x+۱)^۲=(۳\sqrt{x})^۲\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱=۹x\Rightarrow ۴x^۲-۵x+۱=۰\quad(۰/۲۵)$$

$$\Delta=۲۵-۱۶=۹\quad x=\frac{۵\pm۳}{۸}\quad x_۱=\frac{۱}{۴}\ (۰/۲۵)\qquad x_۲=۱\quad(۰/۲۵)$$


دکتر الهه بنام
مدرس زیست رپیتیچ
مهندس شهاب نصیری
مدرس فیزیک رپیتیچ
مهندس علی داودوندی
مدرس ریاضی رپیتیچ
دکتر متین هوشیار
مدرس شیمی رپیتیچ
رپیتیچ
سریعتر یاد بگیـــــــــــــــر...!
با اســاتید رتبه بــرتر و رتبـــه پرور
بــه همــراه مشــاورین رتبـــه برتر
تــو هــم رتبه برتـــر میشـــی رفیق
rapiteach.com