رایگان

شب امتحان

ریاضی یازدهم

دانلود جزوات
شب امتحان

رپیتیچ

ویدیو های
شب امتحان

سریعتر یادبگیریا

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

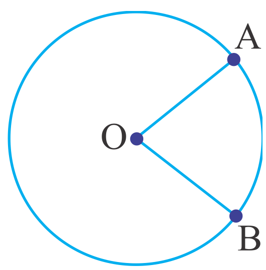
علی داودوندی
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی
مدرس ریاضی رپیتیچ

فصل ۲ : هندسه | پایه یازدهم

فصل ۲: هندسه

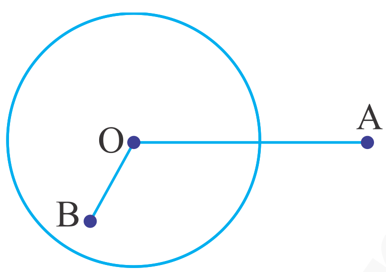
درس اول: ترسیم‌های هندسی

دایره



اگر به مرکز O و شعاع r به کمک پرگار، یک دایره رسم کنیم، تمام نقاط روی این دایره دارای یک خاصیت مشترک خواهند بود و آن خاصیت این است که فاصلهٔ هر نقطه روی دایره تا مرکز O برابر عددی ثابت می‌باشد.

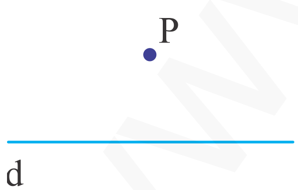
$$\Rightarrow OA = OB = r$$



ضمناً هر نقطه‌ای که خارج دایره باشد، فاصله‌اش تا مرکز از شعاع دایره بیشتر است و هر نقطه‌ای که داخل دایره باشد، فاصله‌اش تا مرکز، کم‌تر از شعاع دایره است.

$$\Rightarrow OA > r \quad , \quad OB < r$$

مثال: نقطهٔ P به فاصلهٔ ۲cm از خط d قرار دارد.

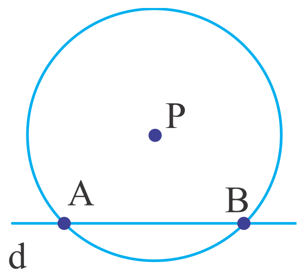


الف) تمام نقاطی که به فاصلهٔ ۳cm از نقطهٔ P هستند را مشخص کنید.

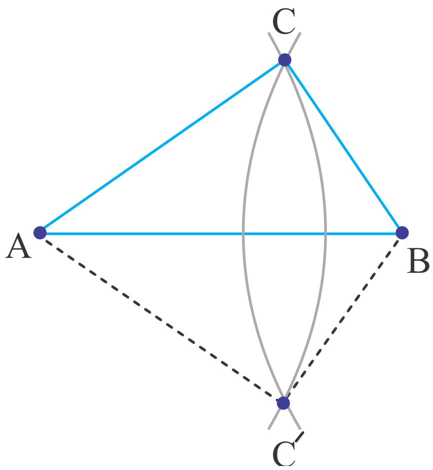
ب) نقاطی از خط d را که به فاصلهٔ $3cm$ از نقطهٔ P هستند تعیین کنید.

حل: الف) کافی است به مرکز P و شعاع ۳ یک دایره رسم کنیم (کمان می‌زنیم).

ب) نقاط برخورد دایره (کمان) با خط d جواب هستند.



مثال: نقاط A و B را به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را پیدا کنید که فاصله‌شان از A برابر ۳ و از B برابر ۲ باشد.



حل: کافی است به مرکز A و شعاع ۳ یک دایره (کمان) و به مرکز B و شعاع ۲ یک دایره (کمان) دیگر رسم کنیم، محل برخورد این دایره‌ها (کمان‌ها) جواب است.

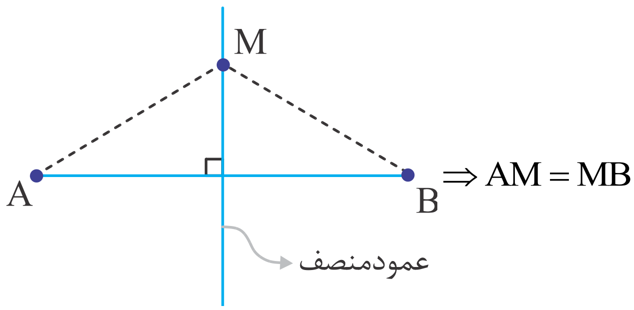
ضمناً مسئله دو جواب دارد (نقاط C و C').

تذکر: اگر نقاط C و C' را به A و B وصل کنیم، مثلث‌های ABC و ABC' ایجاد می‌شوند (ممکن است متن سؤال به این صورت باشد که مثلثی به اضلاع ۴، ۳ و ۲ رسم کنید).

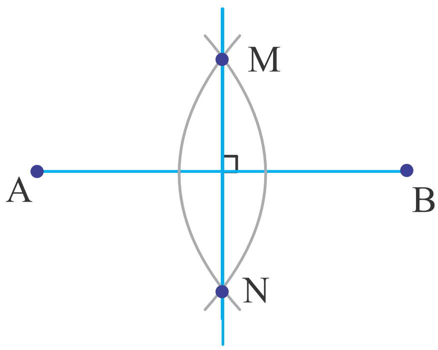
عمود منصف

ویژگی عمودمنصف یک پاره‌خط

می‌دانیم هر نقطه‌ای مانند M که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، فاصله‌اش تا دو سر پاره‌خط یکسان است و برعکس:

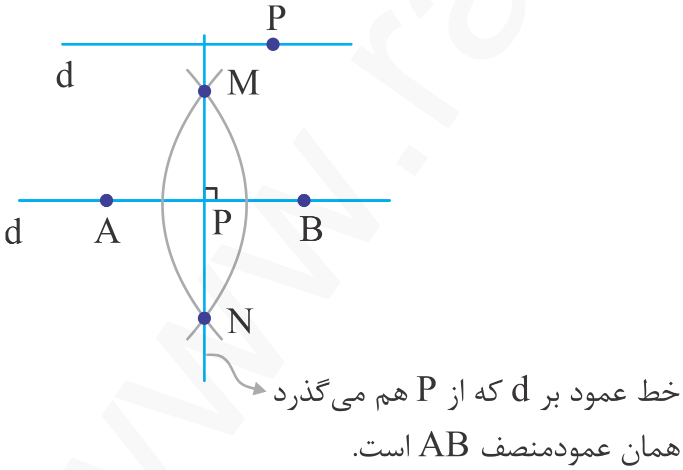


رسم عمودمنصف یک پاره‌خط



برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ دلخواه ولی بیشتر از نصف AB باز کرده، یک بار به مرکز A و یک بار به مرکز B دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در نقاطی مثل M و N قطع کنند؛ خط گذرنده از M و N عمودمنصف AB است.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن: با توجه به شکل می‌خواهیم خطی رسم کنیم که بر d عمود باشد و از P هم بگذرد. روی خط d و در دو طرف P، دو نقطهٔ A و B را طوری اختیار می‌کنیم که $AP = PB$ باشد (مثلاً از نقطهٔ P یک سانتی‌متر به چپ و یک سانتی‌متر به راست بروید تا به نقاط A و B برسید.)

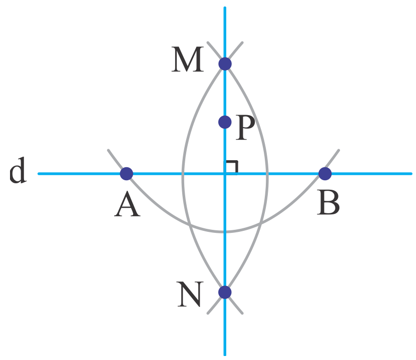


حال طبق مطالب قبلی، عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف هم از P می‌گذرد و هم بر d عمود است. خط گذرنده از M و N جواب مورد نظر است.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن خط (خارج خط)

می‌خواهیم خطی عمود بر d رسم کنیم که از P هم بگذرد. کافی است به مرکز P و شعاع دلخواه کمانی رسم کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند (شعاع را طوری در نظر می‌گیریم که کمان زده شده حتماً خط را در ۲ نقطه قطع کند.)

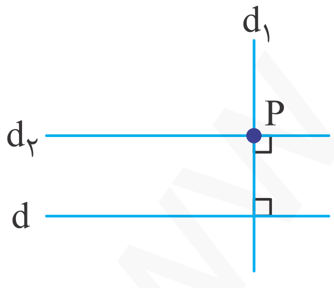
حال کافی است عمودمنصف AB را رسم کنیم. خط گذرنده از M و N جواب ماست.



رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

می‌خواهیم از نقطه‌ای مانند P خطی موازی d رسم کنیم. مراحل کار به شرح زیر است:

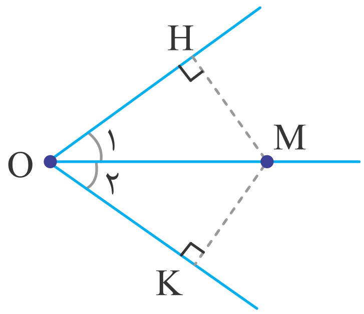
۱) خط d_1 را طوری رسم می‌کنیم که از P گذشته و بر خط d عمود باشد. (قبلاً روش رسم خط عمود را گفته‌ایم.)



۲) خط d_2 را طوری رسم می‌کنیم که از P گذشته و بر خط d_1 عمود باشد.

۳) واضح است که d_2 با d موازی است و از P هم می‌گذرد.

نیمساز



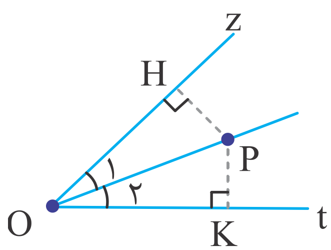
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس.

یعنی هر نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد حتماً روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

$MH = MK \Leftrightarrow M$ روی نیمساز $\hat{O}$ است.

مثال: ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P که روی نیمساز زاویهٔ $z\hat{O}t$ قرار دارد از دو ضلع زاویه، یکسان است.

حل: از P بر دو ضلع Oz و Ot دو عمود رسم می‌کنیم. در دو مثلث $\overset{\Delta}{OHP}$ و $\overset{\Delta}{OPK}$ خواهیم داشت:

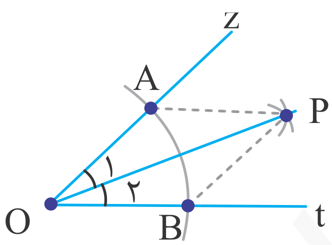


$$\begin{cases} OP = OP \text{ مشترک} \\ \hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{OHP} \cong \overset{\Delta}{OPK}$$

$$\xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} PH = PK$$

نحوهٔ رسم نیمساز یک زاویه

می‌خواهیم نیمساز زاویهٔ $z\hat{O}t$ را رسم کنیم. مراحل به صورت زیر است:



۱) به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا نیم‌خط‌های Oz و Ot را در نقاطی مثل A و B قطع کند.

۲) دهانهٔ پرگار را کمی بیشتر از نصف طول پاره‌خط AB باز کرده و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع کنند.

۳) می‌توان اثبات کرد که مثلث‌های $O\overset{\Delta}{A}P$ و $O\overset{\Delta}{B}P$ هم‌نهشت‌اند (به حالت تساوی ۳ ضلع)، لذا $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ خواهد بود و در نتیجه OP نیمساز زاویهٔ $z\hat{O}t$ است.

درس دوم: استدلال و قضیهٔ تالس

نسبت و تناسب

موارد زیر، کاربردی و مهم هستند:

۱) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$

۲) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

۳) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases}$

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} & \text{(ترکیب در صورت)} \\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} & \text{(ترکیب در مخرج)} \end{cases}$

۵) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \text{ یا } \frac{b-a}{b} = \frac{d-c}{d} & \text{(تفضیل در صورت)} \\ \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \text{ یا } \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} & \text{(تفضیل در مخرج)} \end{cases}$

استدلال استقرایی

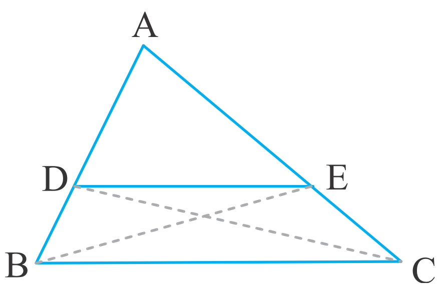
در این استدلال با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت محدود، یک نتیجهٔ کلی در آن موضوع گرفته می‌شود، یعنی از جزء به کل می‌رسیم. البته نتیجهٔ این استدلال، همیشه درست نیست.

استدلال استنتاجی

استدلالی است که براساس حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم صورت می‌گیرد و نتیجهٔ آن، همیشه درست است. مثلاً برای اثبات تمامی اتحادهای ریاضی، از استدلال استنتاجی استفاده می‌شود. چون به کمک قواعد ریاضی قابل اثبات هستند. برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند قضیه نام دارند.

نکته: یک قضیه به شکل «اگر p آن‌گاه q» یا « $p \Rightarrow q$ » می‌باشد که p فرض و q حکم آن است. حال اگر جای فرض و حکم را عوض کنیم به گزارهٔ «اگر q آن‌گاه p» یا « $q \Rightarrow p$ » می‌رسیم که عکس قضیه نام دارد. ضمناً اگر هم « $p \Rightarrow q$ » و هم « $q \Rightarrow p$ » درست باشند، یک قضیهٔ دوشرطی به شکل « $p \Leftrightarrow q$ » یا «اگر p آن‌گاه q و برعکس» یا «p اگر و تنها اگر q» ایجاد خواهد شد.

قضیهٔ تالس



فرض کنید در مثلث زیر، خط DE موازی ضلع BC باشد. می‌توان ثابت کرد که:

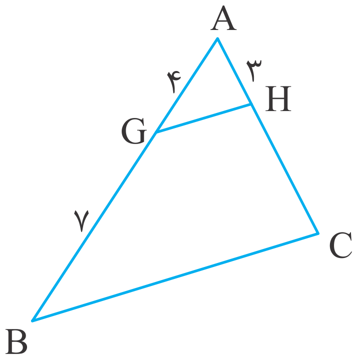
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ (رابطهٔ جزء به جزء)

اثبات: از D به C و از E به B وصل می‌کنیم. مساحت‌های مثلث‌های $\overset{\Delta}{DEC}$ و $\overset{\Delta}{DEB}$ با هم برابرند (چون می‌توان گفت قاعدهٔ هر دوی آن‌ها ED است و ضمناً ارتفاع وارد بر DE در هر دو مثلث برابر است).

ادامهٔ اثبات به این صورت است:

$$\begin{cases} \dfrac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \dfrac{\frac{1}{2}EH_1 \times AD}{\frac{1}{2}EH_1 \times DB} = \dfrac{AD}{DB} \\[2ex] \dfrac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \dfrac{\frac{1}{2}DH_2 \times AE}{\frac{1}{2}DH_2 \times EC} = \dfrac{AE}{EC} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}}$$ رابطهٔ جزء به جزء

مثال: در شکل روبه‌رو $BC \parallel GH$ است. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.



حل:

$$\frac{AG}{GB}=\frac{AH}{HC}\Rightarrow\frac{4}{7}=\frac{3}{HC}\Rightarrow HC=\frac{3\times 7}{4}=\frac{21}{4}$$: جزء به جزء

$$AC=AH+HC=3+\frac{21}{4}=\frac{12+21}{4}=\frac{33}{4}$$

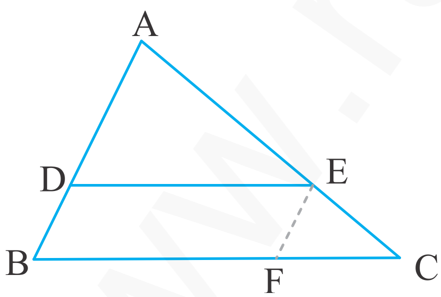
تعمیم (گسترش) قضیهٔ تالس (رابطهٔ جزء به کل)

در قضیهٔ تالس دیدیم که اگر $DE \parallel BC$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{AD}{DB+AD}=\frac{AE}{EC+AE}\Rightarrow\boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}}\quad(1)$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{AB-AD}{AB}=\frac{AC-AE}{AC}\Rightarrow\boxed{\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}}\quad(2)$$

حالا پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم.



$$EF \parallel AB\Rightarrow\boxed{\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}}\quad(3)$$

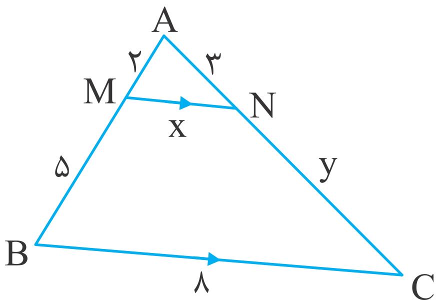
از مقایسهٔ روابط (۱) و (۳) با هم نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$$

تعمیم یافتهٔ تالس (بسیار مهم) $\xrightarrow{BF=DE} \boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}}$

البته معمولاً در امتحانات مدارس، اثبات قضیهٔ تالس و تعمیم‌یافتهٔ آن، خواسته نمی‌شود بلکه از نتایج آن‌ها در طرح سؤال استفاده می‌کنند ولی چون کتاب درسی، جدید است ما اثبات‌ها را نیز آورده‌ایم.

مثال: در شکل مقابل، طول پاره‌خط‌های مجهول x و y را به دست آورید.



حل:

$$(MN \parallel BC)\xrightarrow[\text{تالس جزء به جزء}]{\text{تالس}}\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{۳}{y}\Rightarrow ۲y=۱۵\Rightarrow y=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

$$(MN \parallel BC)\xrightarrow[\text{تالس جزء به جزء}]{\text{تالس}}\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۷}=\frac{x}{۸}\Rightarrow ۷x=۱۶\Rightarrow x=\frac{۱۶}{۷}$$

برهان خلف (برهان غیرمستقیم)

در این استدلال به جای این‌که مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد (فرض خلف) سپس به یک تناقض یا یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم که هیچ کدام نمی‌توانند رخ دهند، لذا در نهایت می‌گوییم که فرض خلف باطل بود و حکم درست است.

مثال: اگر $n \in N$ و $n^{۲}$ عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

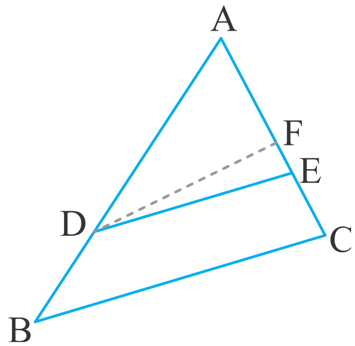
حل: حکم را غلط فرض می‌کنیم، n فرد نیست (زوج است) پس n را به صورت $n = 2k$ در نظر می‌گیریم.

لذا n^2 برابر است با:

$$n^2 = (2k)^2 = \overbrace{4k^2}^{\text{زوج است}} \Rightarrow n^2 \text{ زوج است}$$

ولی طبق فرض مسئله، n^2 فرد است، لذا به یک تناقض می‌رسیم و می‌گوییم n از ابتدا نمی‌توانست زوج باشد، پس فرد است.

عکس قضیهٔ تالس



در شکل مقابل اگر $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE \parallel BC$.

اثبات: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط است یعنی $DE \nparallel BC$. حال خودمان از D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ F قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$$

از طرفی در فرض سؤال داشتیم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

و از مقایسهٔ دو تناسب اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FC}$$

با ترکیب نسبت در مخرج داریم:

$$\frac{AE}{EC + AE} = \frac{AF}{FC + AF} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AE = AF$$

یعنی E و F در واقع بر هم منطبق هستند و لذا DF همان DE است. لذا از ابتدا فرض خلف یعنی $DE \nparallel BC$ نادرست بوده و خواهیم داشت: $DE \parallel BC$

تذکر: الان ثابت کردیم که عکس قضیهٔ تالس هم درست است، لذا می‌توان خود قضیهٔ تالس و عکس آن را به صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کرد. یعنی:

قضیه: فرض می‌کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Leftrightarrow DE \parallel BC$$

مثال نقض

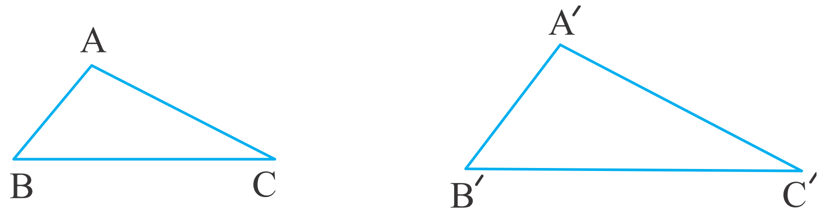
مثالی است که کلیت یک حکم را باطل می‌کند. به گزارهٔ «هر عدد اول، فرد است» دقت کنید. اگر حتی یک عدد اول پیدا شود که زوج باشد، حکم بالا نقض می‌شود. می‌دانیم عدد ۲ اول است، ولی زوج است؛ پس با یک مثال، حکم داده شده را باطل کردیم.

توجه کنید اگر برای گزاره‌ای نتوانستیم مثال نقض بیاوریم به این معنی نیست که حتماً درست است بلکه باید بتوانیم با قواعد ریاضی یا هندسه، درستی آن را ثابت کنیم. مثلاً برای گزارهٔ «در هر مستطیل، اندازهٔ قطرها با هم برابرند» نمی‌توانیم مثال نقض بیاوریم.

ولی برای پذیرش این حکم باید آن را اثبات کرد.

تشابه مثلث‌ها

از سال نهم می‌دانید که دو مثلث وقتی متشابه‌اند که زوایای آن‌ها مساوی و نسبت اضلاع آن‌ها نیز برابر باشند، یعنی:



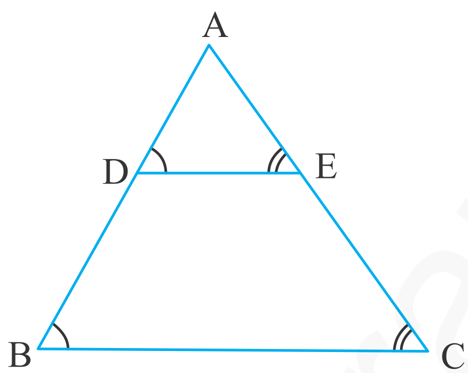
$$\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}' \ , \ \hat{B}=\hat{B}' \ , \ \hat{C}=\hat{C}' \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k \end{cases}$$

به k نسبت تشابه می‌گوییم.

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

اثبات:



$$(DE \parallel BC \text{ و } AB \text{ مورب است}) \Rightarrow \hat{B}=\hat{D}$$

$$(DE \parallel BC \text{ و } AC \text{ مورب است}) \Rightarrow \hat{E}=\hat{C}$$

پس زاویه‌های دو مثلث، با هم برابرند. از طرفی طبق تالس (جزء به کل) داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

پس اضلاع هم با هم متناسب‌اند، لذا دو مثلث ADE و ABC با هم متشابه‌اند.

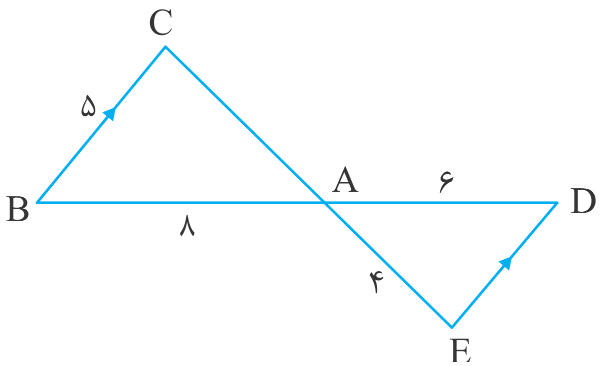
حالت‌های تشابه دو مثلث

۱) اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۲) اگر اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۳) اگر اندازه‌های سه ضلع مثلثی با اندازه‌های سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند، آن مثلث‌ها متشابه‌اند.

مثال: در شکل زیر $BC \parallel DE$ است، اندازهٔ پاره‌خط‌های DE و CA را به دست آورید.



حل:

$$(BC \parallel DE \text{ و } CE \text{ مورب است}) \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}$$

$$(BC \parallel DE \text{ و } BD \text{ مورب است}) \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$$

پس دو مثلث ABC و ADE با هم متشابه‌اند و داریم:

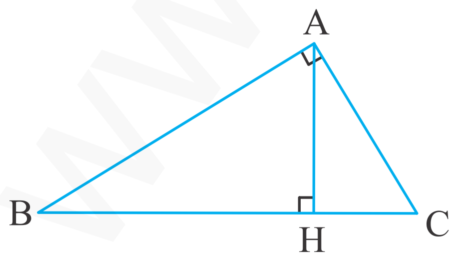
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{۵} = \frac{۶}{۸} = \frac{۴}{AC}$$

$$\begin{cases} \dfrac{DE}{۵} = \dfrac{۶}{۸} \Rightarrow DE = \dfrac{۵ \times ۶}{۸} = \dfrac{۱۵}{۴} \\ \dfrac{۶}{۸} = \dfrac{۴}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{۴ \times ۸}{۶} = \dfrac{۱۶}{۳} \end{cases}$$

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

۱) اگر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ در رأس A قائمه باشد و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد، آن‌گاه:

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ABH} \cong \overset{\Delta}{AHC}$$



۲) از تشابه مثلث‌ها در قسمت (۱) خواهیم داشت:

$$\boxed{\begin{array}{l} AB^{2} = BC \times BH \\ AC^{2} = BC \times CH \\ AH^{2} = BH \times CH \end{array}}$$

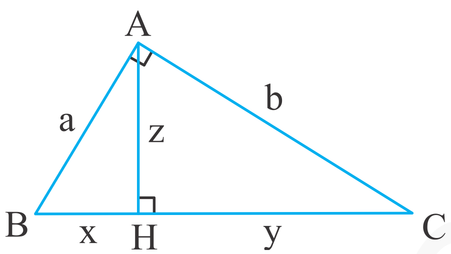
۳) رابطهٔ فیثاغورس را می‌توان به کمک فرمول‌های (۲) اثبات کرد:

$$AB^{2} + AC^{2} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{فاکتور از } BC} \qquad \underbrace{\qquad\quad}_{BC} \qquad C^{2}$$

۴) مساحت مثلث ABC را به دو روش می‌توان محاسبه کرد:

$$S = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \Rightarrow \boxed{AH \times BC = AB \times AC}$$

مثال: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC در هر قسمت، مجهول را به دست آورید.



الف) $a = ?\ ,\ y = 4\ ,\ x = 2$

ب) $x + y = ?\ ,\ b = 5\ ,\ a = 3\ ,\ z = 7$

حل:

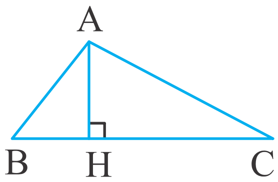
الف) $AB^{2} = BC \times BH \Rightarrow a^{2} = (x + y) \times x$

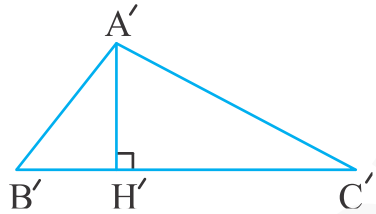
$$\Rightarrow a^{2} = (2 + 4) \times 2 = 12 \xrightarrow{\text{جذر}} a = \sqrt{12}$$

ب) $AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow z \times (x + y) = a \times b$

$$\Rightarrow 7 \times (x + y) = 3 \times 5 \Rightarrow x + y = \frac{15}{7}$$

نکته: اگر نسبت تشابه دو مثلث برابر k باشد، نسبت محیط آن‌ها برابر k، نسبت ارتفاع‌های متناظر برابر k و نسبت مساحت‌ها برابر k^{2} خواهد بود. مثلاً در شکل زیر، با فرض آن‌که نسبت تشابه برابر ۲ باشد، آن‌گاه:





فرض سؤال : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k = ۲$

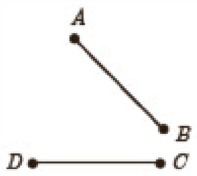
نسبت مساحت‌ها $= \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^{۲} = ۲^{۲} = ۴$

نسبت محیط‌ها $= \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k = ۲$

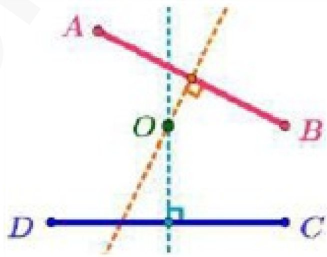
نسبت ارتفاع‌ها $= \frac{A'H'}{AH} = k = ۲$

۱ الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه‌ی D و C نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطه‌ی موردنظر در قسمت (الف) را O می‌نامیم. اگر نقطه‌ی O روی عمودمنصفِ پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی ABCD نسبت به دایره‌ی G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



پاسخ: ۱ الف) نقطه‌ی موردنظر محل برخورد عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AB و CD است.



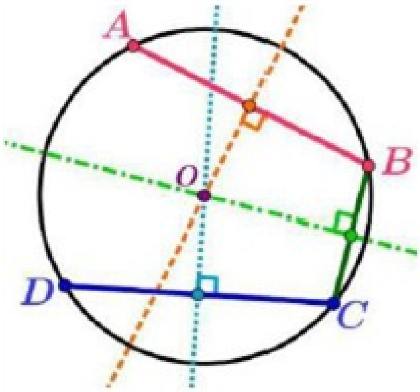
ب) چهار نقطه A, B, C, D روی دایره G قرار خواهند داشت. زیرا:

چون O روی عمودمنصف AB است پس: $\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$ (۱)

چون O روی عمودمنصف CD است پس: $\mathrm{OC} = \mathrm{OD}$ (۲)

چون O روی عمودمنصف BC است پس: $\mathrm{OC} = \mathrm{OB}$ (۳)

پس طبق روابط ۱، ۲، ۳ خواهیم داشت: $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD}$ و چون شعاع دایره برابر OA است پس حتماً ۴ نقطه روی دایره G قرار خواهند داشت.



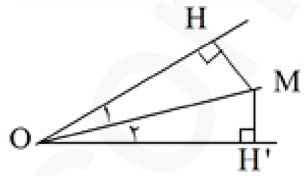
۲ با رسم شکل ثابت کنید فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه برابر است.

پاسخ: ۱

$\widehat{O}_{۱} = \widehat{O}_{۲}$

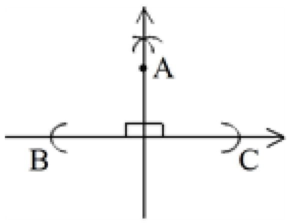
OM

$\widehat{H} =< \widehat{H}' = ۹۰ \Rightarrow O\widehat{M}H = O\widehat{M}H' \Rightarrow \mathrm{MH} = \mathrm{MH}'$



۳ از نقطه‌ی A خارج از خط L خطی بر آن عمود کنید. (با خط کش و پرگار)

پاسخ: ۱



۴ طریقه‌ی رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

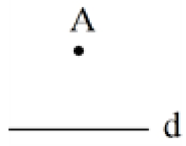
پاسخ: ۱ فرض کنید می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، به مرکز A, B با شعاع یکسان دو کمان طوری رسم می‌کنیم که با هم متقاطع باشند. نقاط برخورد این دو کمان از A, B به یک فاصله هستند، پس روی عمودمنصف قرار دارند. بنابراین با وصل کردن این دو نقطه به هم عمودمنصف رسم می‌شود.

۵ فرض کنید نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

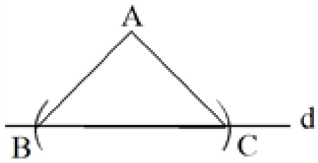
الف) مثلث متساوی‌الساقینی که A یک رأس آن و قاعده‌ی آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $\text{۸cm}^{۲}$ باشد.



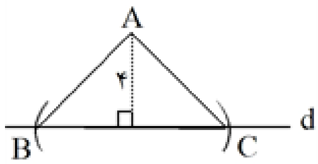
پاسخ: **۱** الف) کافی است به مرکز A و شعاعی که اندازه‌اش بیش‌تر از فاصله‌ی A تا d باشد کمانی بزنیم تا خط d را در ۲ نقطه به نام‌های B و C قطع کند. مثلث متساوی‌الساقین ABC به دست می‌آید.



مثلث ABC متساوی‌الساقین است. $\Rightarrow$ شعاع دایره $= \mathrm{AB} = \mathrm{AC}$

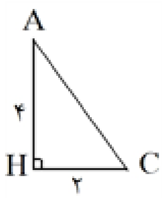
ب) کافی است کمانی به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر بزنیم تا خط d را در نقاطی مثل N و M قطع کند، مثلث AMN متساوی‌الساقین بوده و طول ساق‌های آن ۶ سانتی‌متر است.

پ) طبق شکل، AH ارتفاع وارد بر قاعده است و داریم:



$$\text{مساحت } S = \frac{\mathrm{BC} \times \mathrm{AH}}{۲} = ۸ \Rightarrow \frac{\mathrm{BC} \times ۴}{۲} = ۸ \Rightarrow \mathrm{BC} = ۴$$

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر وتر، میانه هم هست لذا: $\mathrm{BH} = \mathrm{HC} = ۲$ بنابراین:



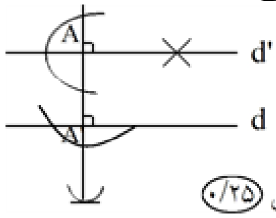
$$\text{فیثاغورس} = \mathrm{AC}^{۲} = \mathrm{AH}^{۲} + \mathrm{HC}^{۲} \Rightarrow \mathrm{AC}^{۲} = ۴^{۲} + ۲^{۲} = ۲۰$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \mathrm{AC} = \sqrt{۲۰} = \sqrt{۴ \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

پس باید به مرکز A و شعاع $۲\sqrt{۵}$ کمان بزنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند، مثلث ABC جواب است.

۶ با استفاده از خط‌کش و پرگار خطی موازی یک خط از یک نقطه‌ی خارج آن خط رسم کنید. (مراحل رسم را توضیح دهید.)

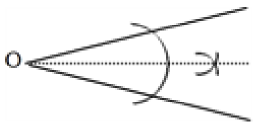
پاسخ: **۱** مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. می‌دانیم که دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند. ابتدا از نقطه‌ی A بر خط d عمودی رسم می‌کنیم ۰/۲۵ تا آن‌را در نقطه‌ی A' قطع کند. سپس از نقطه‌ی A خطی عمود بر'AA رسم می‌کنیم. ۰/۲۵ و آن‌را 'd می‌نامیم. خط 'd همان خط مطلوب است.



شکل ۰/۲۵

۷ مراحل رسم نیمساز یک زاویه را به کمک خط کش و پرگار توضیح دهید.

پاسخ: ۱ به مرکز رأس زاویه‌ی (O) و به شعاع دل‌خواه یک دایره رسم می‌کنیم که این دایره هرکدام از ضلع‌های زاویه را در یک نقطه قطع می‌کند. به مرکز نقاط به‌دست آمده و به شعاع دایره‌ی قبل، دایره‌هایی رسم می‌کنیم. این دایره‌ها هم‌دیگر را قطع می‌کنند. از محل تقاطع دایره‌ها به O وصل می‌کنیم. پاره‌خط رسم شده، نیمساز زاویه‌ی مذکور است. ۰/۷۵

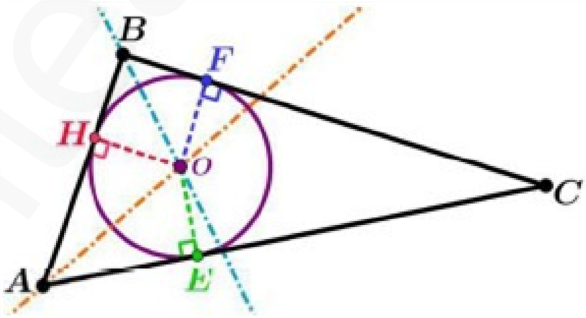


۸ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه‌ی این مثلث را رسم کنید و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را O بنامید. از نقطه‌ی O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

پاسخ: ۱ چون O روی نیمساز A است پس: $\mathrm{OH} = \mathrm{OE}$ (۱)

چون O روی نیمساز B است پس: $\mathrm{OH} = \mathrm{OF}$ (۲)

پس طبق روابط ۱، ۲ خواهیم داشت: $\mathrm{OH} = \mathrm{OE} = \mathrm{OF}$ چون شعاع دایره برابر OH است پس حتماً نقاط E, F روی دایره قرار خواهند داشت. در نتیجه اضلاع مثلث ABC مماس بر دایره هستند.



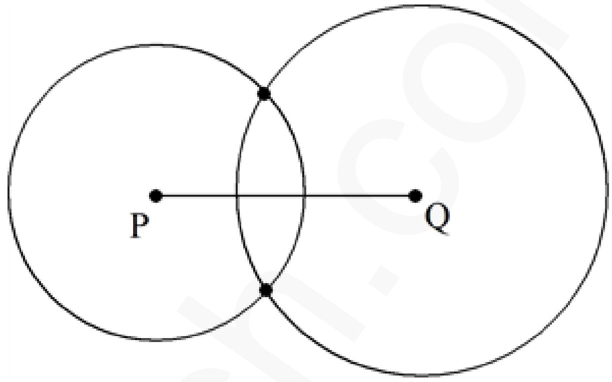
۹ اگر پاره‌خط $PQ = ۷$ باشد، آن‌گاه با رسم شکل مناسب به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مکان هندسی نقاطی را مشخص کنید که از پاره‌خط PQ به فاصله ۲ واحد باشد.

ب) چند نقطه وجود دارد که از P به فاصله ۴ و از Q به فاصله ۵ واحد باشد؟

پاسخ: ۱ الف) در پاره‌خط موازی PQ به فاصله ۲ سانتی‌متر

ب) باید دو دایره به مرکزیت P به شعاع ۴ و به مرکزیت Q به شعاع ۵ واحد رسم کنیم و این دو دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

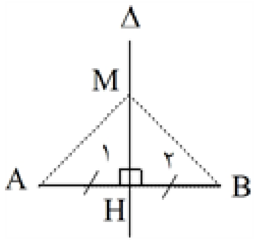


۱۰ ثابت کنید هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

پاسخ: ۱ پاره‌خط دلخواهی مانند AB درنظر می‌گیریم. خط Δ، عمودمنصف خط AB را رسم می‌کنیم و نقطه‌ی دلخواهی مانند M روی آن درنظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم فاصله‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک اندازه است، یعنی

$MA = MB$

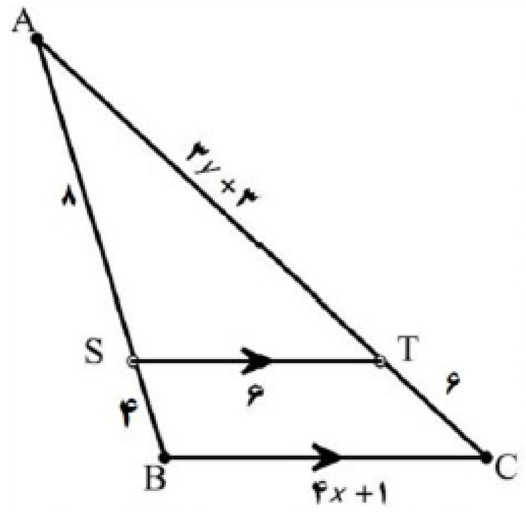
برای اثبات، M را به A و B وصل می‌کنیم. دو مثلث MAH و MBH را درنظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم این دو مثلث همنهشت می‌باشند.



$$\begin{cases} AH = HB \ (\text{است } AB \text{ وسط } H) \\ \widehat{H}_۱ = \widehat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ MH = MH \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} M\overset{\triangle}{A}H \cong M\overset{\triangle}{B}H$$

پس سایر اجزای دو مثلث با هم برابرند و در نتیجه $MA = MB$ است.

۱۱ در شکل زیر $\mathrm{ST} \parallel \mathrm{BC}$ است. مقدار x, y را به دست آورید.



پاسخ: ۱

$$\mathrm{ST} \parallel \mathrm{BC} \Rightarrow \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SB}} = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{TC}}, \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{ST}}{\mathrm{BC}}$$

$$\frac{۸}{۴} = \frac{۳y+۳}{۶} \Rightarrow ۳y+۳ = ۱۲ \Rightarrow y = ۳$$

$$\frac{۸}{۱۲} = \frac{۶}{۴x+۱} \Rightarrow ۸x+۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۲$$

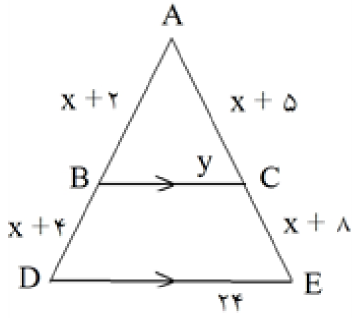
۱۲ اگر $\frac{z-۲}{۴} = \frac{y+۵}{۳} = \frac{x-۱}{۲}$، آن‌گاه $\frac{x+y+۴}{x+y+z+۲}$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۵}{۳} = \frac{z-۲}{۴} = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-۱}{۲} = t \Rightarrow x = ۲t+۱ \\ \frac{y+۵}{۳} = t \Rightarrow y = ۳t-۵ \\ \frac{z-۲}{۴} = t \Rightarrow z = ۴t+۲ \end{cases}$$

$$\frac{x+y+۴}{x+y+z+۲} = \frac{۲t+۱+۳t-۵+۴}{۲t+۱+۳t-۵+۴t+۲+۲} = \frac{۵t}{۹t} = \frac{۵}{۹}$$

۱۳ اگر $DE \parallel BC$ باشد مقدار x و y را حساب کنید.

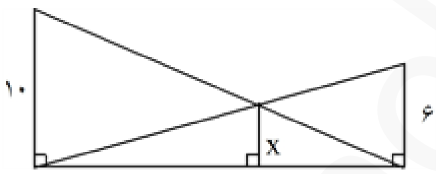


پاسخ: ۱ چون $DE \parallel BC$ است بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم:

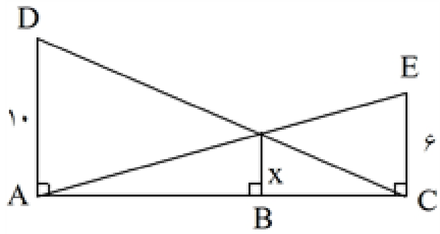
$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}\Rightarrow\frac{x+۲}{x+۴}=\frac{x+۵}{x+۸}\Rightarrow x^۲+۱۰x+۱۶=x^۲+۹x+۲۰\Rightarrow x=۴$$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}\Rightarrow\frac{۶}{۱۴}=\frac{y}{۲۴}\Rightarrow y=\frac{۶\times۲۴}{۱۴}\Rightarrow y=\frac{۷۲}{۷}$$

۱۴ مقدار x را حساب کنید.



پاسخ: ۱

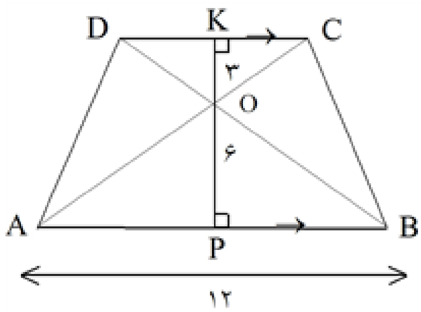


$$\begin{cases}\frac{AB}{AC}=\frac{x}{۶}\\ \frac{BC}{AC}=\frac{x}{۱۰}\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}}$$

$$\frac{AB}{AC}+\frac{BC}{AC}=\frac{x}{۶}+\frac{x}{۱۰}$$

$$\Rightarrow\frac{\overbrace{AB+BC}^{AC}}{AC}=\frac{۱۰x+۶x}{۶۰}\Rightarrow۱=\frac{۱۶x}{۶۰}\Rightarrow x=\frac{۶۰}{۱۶}\Rightarrow x=\frac{۱۵}{۴}$$

۱۵ در شکل زیر مطلوب است اندازه DC:



پاسخ: ۱

$$\frac{OK}{OP}=\frac{DC}{AB}\Rightarrow\frac{۳}{۶}=\frac{DC}{۱۲}\Rightarrow DC=۶$$

۱۶ هریک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولِ بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

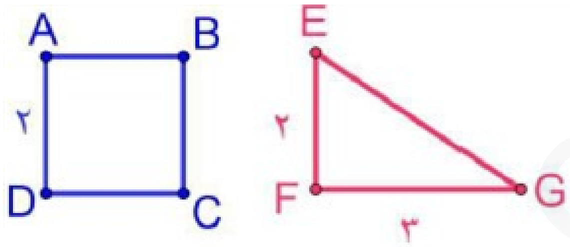
ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیش‌تر است.

پ) در هر مثلث اندازه‌ی هر ضلع از اندازه‌ی هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر بر هر ضلع بر هم منطبق‌اند.

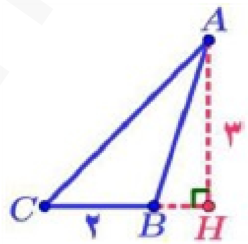
پاسخ: ۱ الف) ۲۱۱ عدد اول است و از ۱۲۷ بزرگ‌تر است.

ب)

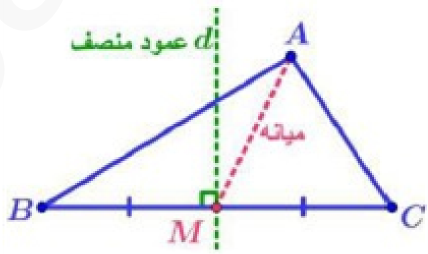


$$S_{\Delta\,\mathrm{EFG}} < S_{\square\,\mathrm{ABCD}} \Longleftarrow \mathrm{S}_{\square\,\mathrm{ABCD}} = ۲\times۲ = ۴,\ S_{\Delta\,\mathrm{EFG}} = \frac{۱}{۲}\times۲\times۳ = ۳$$

پ)



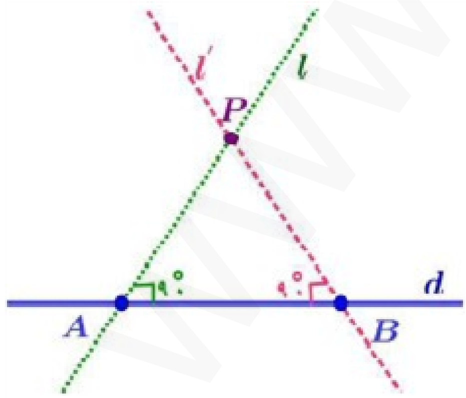
ت)



۱۷ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط ، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

پاسخ: ۱ (فرض خلف) فرض می‌کنیم از نقطه P خارج خط d دو خط L و 'L بر d عمود هستند.

پس هر دو خط L و L'، خط d را در دو نقطه A و B قطع می‌کنند. و چون عمود هستند لذا داریم:



$$\widehat{A} = \widehat{۹۰}\ ,\ \widehat{B} = ۹۰^\circ$$

$$\Delta\mathrm{ABP} : \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{P} = ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + \widehat{P}$$

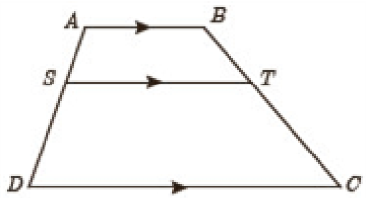
$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{P} = ۱۸۰^\circ + P^\circ \xrightarrow{\widehat{P}>۰}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{P} > ۱۸۰^\circ$$

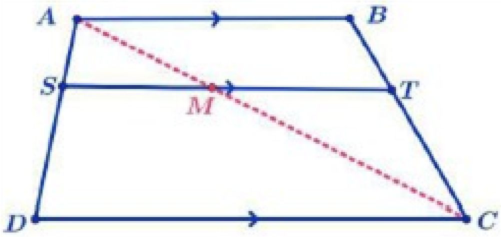
این متناقض با این است که مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰° است. پس فرض غلط است.

۱۸ در ذوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



پاسخ: ۱ قطر AC را رسم می‌کنیم نقطه برخورد قطر AC با خط ST را M می‌نامیم.



$\Delta ADC : SM \parallel DC \Rightarrow$ طبق قضیه تالس $\Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{AM}{MC}$ (۱)

$\Delta CAB : AB \parallel MT \Rightarrow$ طبق قضیه تالس $\Rightarrow \frac{MC}{AM} = \frac{CT}{TB}$

$\Rightarrow$ عکس تناسب $\Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{TB}{CT}$ (۲)

طبق روابط ۱ و ۲ $\Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{TB}{CT}$

۱۹ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

الف) $\frac{b}{۸+b} = \frac{a}{۱۰+a}$

ب) $\frac{۳b+۷}{۷+۲b} = \frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}$

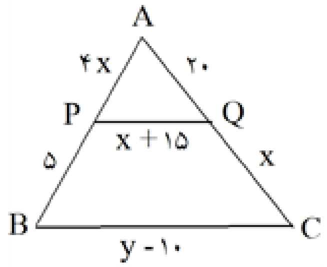
پاسخ: ۱

الف) $\frac{a}{۱۰+a} = \frac{b}{۸+b} \Rightarrow ۸a + \cancel{ab} = ۱۰b + \cancel{ab} \Rightarrow ۸a = ۱۰b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱۰}{۸} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۵}{۴}$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a} = \frac{۳b+۷}{۷+۲b} \Rightarrow ۲۱a + \cancel{۶ab} + \cancel{۷۰} + ۲۰b = ۳۰b + \cancel{۷۰} + \cancel{۶ab} + ۱۴a$

$\Rightarrow ۲۱a - ۱۴a = ۳۰b - ۲۰b \Rightarrow ۷a = ۱۰b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱۰}{۷}$

۲۰ در شکل زیر، PQ با BC موازی است، مقادیر x و y را محاسبه کنید.



پاسخ: ۱ با توجه به قضیه تالس داریم:

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{CQ}}\Rightarrow\frac{۴x}{۵}=\frac{۲۰}{x}\Rightarrow ۴x^۲=۱۰۰\Rightarrow x^۲=۲۵\Rightarrow x=۵$$

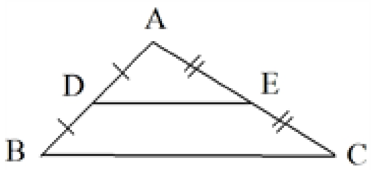
با توجه به تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BC}}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲۰+x}=\frac{x+۱۵}{y-۱۰}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲۵}=\frac{۲۰}{y-۱۰}\Rightarrow y-۱۰=۲۵\Rightarrow y=۳۵$$

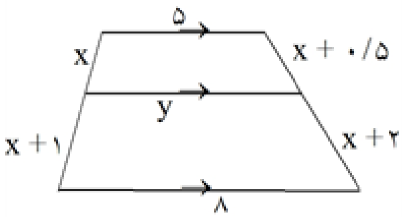
۲۱ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط های دو ضلع را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

پاسخ: ۱

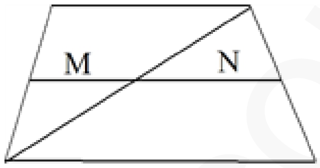
$$\underset{(۰/۲۵)}{\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}=\frac{۱}{۲}}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}\underset{(۰/۲۵)}{\mathrm{DE}\parallel\mathrm{BC}}\xrightarrow{\text{تالس}}\underset{(۰/۲۵)}{\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}}=\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\underset{(۰/۲۵)}{\mathrm{DE}=\frac{۱}{۲}\mathrm{BC}}$$



۲۲ در شکل مقابل، x و y را محاسبه کنید.



پاسخ: ۱



$$\frac{x}{x+۱} = \frac{x+۰/۵}{x+۲} \Rightarrow x^۲ + ۲x = x^۲ + ۱/۵x + ۰/۵$$
$$۰/۵x = ۰/۵ \Rightarrow x = ۱$$

$$\frac{M}{۵} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow M = \frac{۱۰}{۳}$$
$$\frac{N}{۸} = \frac{۱/۵}{۴/۵} \Rightarrow N = \frac{۸}{۳}$$
$$y = M+N = \frac{۱۰}{۳}+\frac{۸}{۳} = ۶$$

۲۳ عکس قضایای زیر را بنویسید.

الف) قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه قطرهایش یک‌دیگر را نصف می‌کنند.

ب) قضیه: اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند آن‌گاه مساحت‌های آن‌ها برابر است.

پاسخ: ۱ الف) اگر یک چهارضلعی قطرهایش یک‌دیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر دو مثلث مساحت برابر داشته باشند، هم‌نهشت هستند.

۲۴ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید که $\sqrt{۳}$ گنگ است.

پاسخ: ۱ برهان خلف : $\sqrt{۳}\in Q \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a}{b}, (a,b) = ۱ \Rightarrow ۳ = \frac{a^۲}{b^۲} \Rightarrow a^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow (a = ۳k)$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$\Rightarrow (۳k)^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow ۹k^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow (b = ۳k') \Rightarrow (a,b) = ۳$

۰/۲۵

پس a ، b هر دو مضربی از ۳ هستند و نسبت به هم اول نیستند، پس به تناقض رسیده و حکم اصلی درست است. ۰/۲۵

۲۵ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، حکم زیر را ثابت کنید:

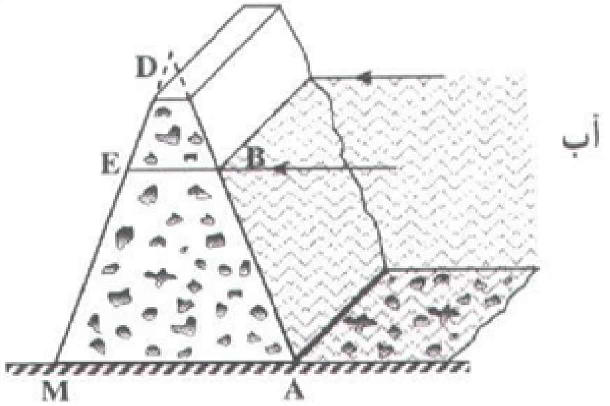
اگر $n^۲$ مضربی از ۱۰ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۱۰ است.

پاسخ: ۱ فرض خلف : $n =$ مضرب نباشد۱۰ $\Rightarrow n = ۱۰k + r, r \neq ۰$

$$\Rightarrow n^۲ = \underbrace{۱۰۰k^۲ + ۲۰\,k\,.\,r}_{۱۰\,q} + r^۲ = ۱۰q + r^۲ \neq ۱۰q'$$

یعنی $n^۲$ مضرب ۱۰ نیست پس متناقض با فرض مسئله است یعنی فرض خلف غلط است.

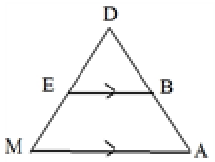
۲۶ در شکل مقابل، اگر $DB = ۳۰m$ ، $DE = ۲۰m$ و $DM = ۱۰۰m$ باشد، با استفاده از قضیه‌ی تالس، طول BA را پیدا کنید.



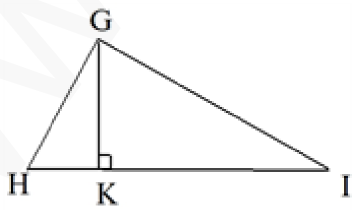
پاسخ: ۱

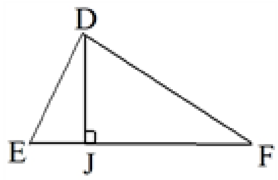
$$EM = DM - DE = ۱۰۰ - ۲۰ = ۸۰$$

$$EB \,||\, AM \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DB}{BA} = \frac{DE}{EM} \Rightarrow \frac{۳۰}{BA} = \frac{۲۰}{۸۰} \Rightarrow BA = \frac{۳۰\times۸۰}{۲۰} \Rightarrow BA = ۱۲۰$$



۲۷ در شکل زیر دو مثلث DEF و GHI متشابه‌اند و $GK = \frac{۳}{۲}DJ$. اگر $HI = ۲۰$ طول EF را حساب کنید.

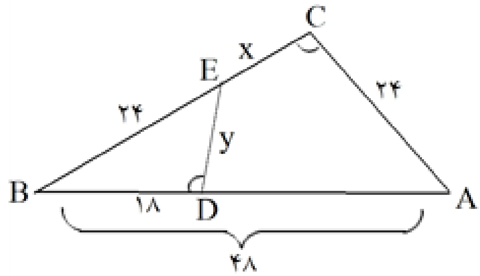




پاسخ: ۱ در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌های نظیر با نسبت تشابه برابر است.

$$\overset{\triangle}{HGI} \sim \overset{\triangle}{DEF} \Rightarrow \frac{GK}{DJ} = \frac{HI}{EF} \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{۲۰}{EF} \Rightarrow EF = \frac{۴۰}{۳}$$

۲۸ در شکل مقابل، $\widehat{C} = B\widehat{D}E$. طول x و y را پیدا کنید.

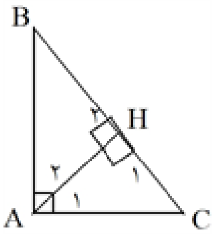


پاسخ: ۱

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{C} = B\widehat{D}E \\ \widehat{B} = \widehat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{D}E \sim A\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \frac{\text{BD}}{\text{BC}} = \frac{\text{ED}}{\text{AC}} = \frac{\text{BE}}{\text{AB}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۸}{۲۴+x} = \frac{y}{۲۴} = \frac{۲۴}{۴۸} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱۸}{۲۴+x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲۴+x = ۳۶ \Rightarrow x = ۱۲ \\ \frac{y}{۲۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲y = ۲۴ \Rightarrow y = ۱۲ \end{cases}$$

۲۹ نشان دهید در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده روی وتر است.

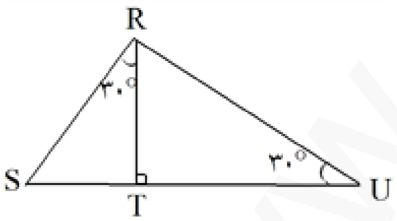


پاسخ: ۱ دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}H$ و $A\overset{\triangle}{C}H$ را در نظر می‌گیریم.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{C} + \widehat{A}_۱ = ۹۰^\circ \\ \widehat{A}_۲ + \widehat{A}_۱ = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}\widehat{C} = \widehat{A}_۲ \\ \widehat{H}_۱ = \widehat{H}_۲\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}H \sim A\overset{\triangle}{C}H \Rightarrow \frac{\text{AH}}{\text{BH}} = \frac{\text{CH}}{\text{AH}} \Rightarrow \text{AH}^۲ = \text{BH} \times \text{CH}$$

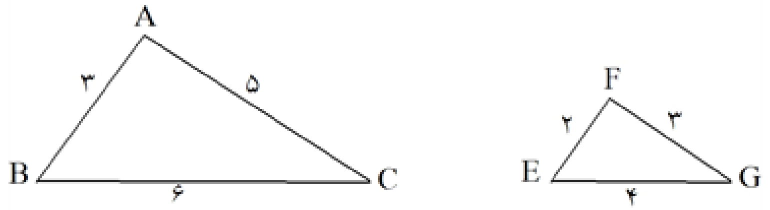
پس ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی بین دو نقطه‌ی ایجاد شده روی وتر است.

۳۰ آیا دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند؟



پاسخ: ۱ دو مثلث متشابه هستند زیرا زوایای نظیر در آنها برابرند.

۳۱ آیا دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند؟

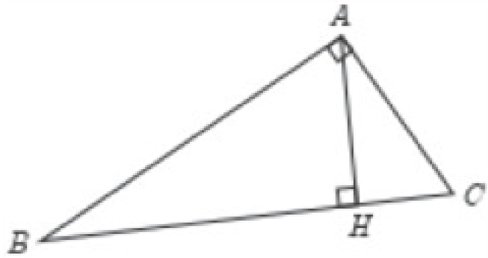


پاسخ: **۱**

$$\frac{۳}{۲} \neq \frac{۵}{۳} \neq \frac{۶}{۴} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \not\sim \mathrm{EFG}$$

باید اضلاع نظیر متناسب باشند. پس دو مثلث متشابه نیستند.

۳۲ در مثلث قائم‌الزاویه زیر، اندازه پاره‌خط‌های خواسته شده را به دست آورید.

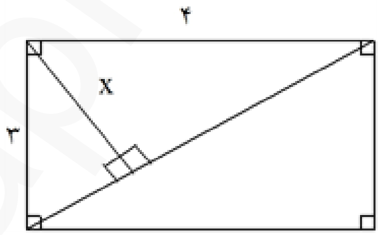


$$\mathrm{BH} = ۹\,,\ \mathrm{AH} = ۶$$
$$\mathrm{BC} = ?$$
$$\mathrm{AC} = ?$$

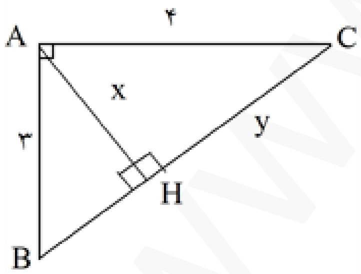
پاسخ: **۱**

$$\mathrm{AH}^۲ = \mathrm{BH} \times \mathrm{HC} \Rightarrow ۳۶ = ۹ \times \mathrm{HC} \Rightarrow \mathrm{HC} = ۴ \Rightarrow \mathrm{BC} = ۱۳$$
$$\mathrm{AC}^۲ = \mathrm{HC} \times \mathrm{BC} \Rightarrow \mathrm{AC}^۲ = ۴ \times ۱۳ \Rightarrow \mathrm{AC} = ۲\sqrt{۱۳}$$

۳۳ مقدار x را حساب کنید.

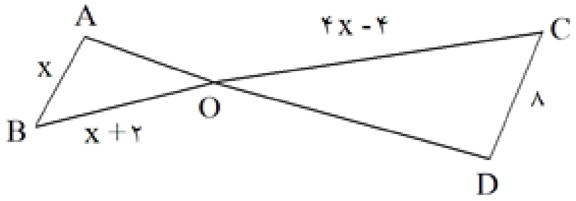


پاسخ: **۱** در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:



$$\mathrm{BC}^۲ = \mathrm{AB}^۲ + \mathrm{AC}^۲ \Rightarrow y^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow y^۲ = ۲۵ \Rightarrow y = ۵$$
$$\mathrm{AH} \times \mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \Rightarrow x \times ۵ = ۳ \times ۴$$
$$\Rightarrow x = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

۳۴ مقدار x را حساب کنید. $(AB \parallel CD)$

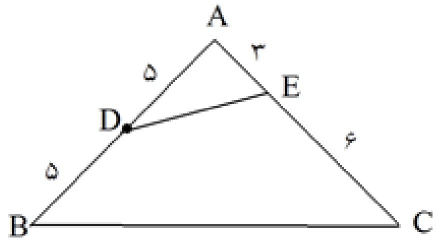


پاسخ: ۱ این دو مثلث بنا به دو زاویه برابر متشابه هستند.

$$\begin{cases} \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲ \\ \widehat{A} = \widehat{D} \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{BO}{OC} \Rightarrow \frac{x}{۸} = \frac{x+۲}{۴x-۴} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{x+۲}{x-۱} \Rightarrow x^۲ - x = ۲x + ۴$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \text{ ق ق} \\ x = -۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

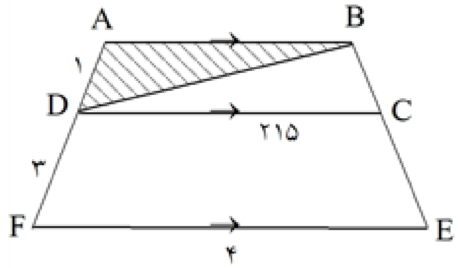
۳۵ در شکل زیر مطلوب است محاسبه $\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$:



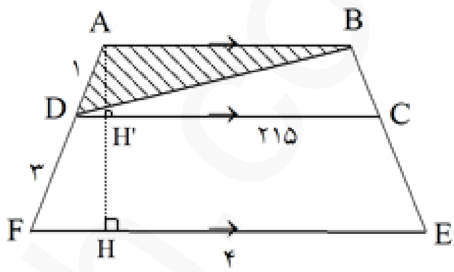
پاسخ: ۱

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AD \times AE \operatorname{Sin} A}{\frac{۱}{۲} AB \times AC \operatorname{Sin} A} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC} = \frac{۳ \times ۵}{۱۰ \times ۹} = \frac{۱}{۶}$$

۳۶ در شکل زیر مساحت ناحیه هاشور زده چه کسری از مساحت ذوزنقه ABEF است؟ ($DC \parallel EF$)



پاسخ: ۱



$$DC = \frac{AD \times EF + DF \times AB}{AF} \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۱\times ۴ + ۳\,AB}{۴} \Rightarrow ۳AB = ۱۰ - ۴ = ۶ \Rightarrow AB = ۲$$

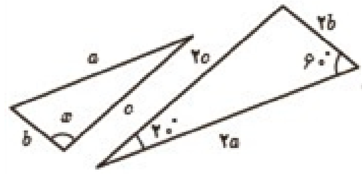
از A عمود AH را بر EF وارد می‌کنیم در این صورت:

$$\frac{AH'}{AH} = \frac{AD}{AF} = \frac{۱}{۴}$$

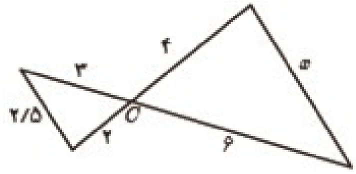
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{ABEF}} = \frac{\frac{۱}{۲}AH' \times AB}{\frac{۱}{۲}(AB + EF)\times AH} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}} \times ۲ \times AH'}{\cancel{\frac{۱}{۲}} \times ۶ \times AH} = \frac{۱}{۳} \times \frac{AH'}{AH} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۱۲}$$

۳۷ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.

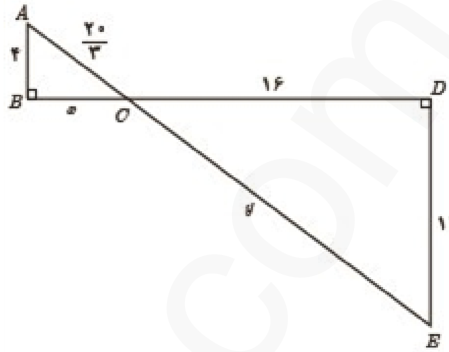
الف)



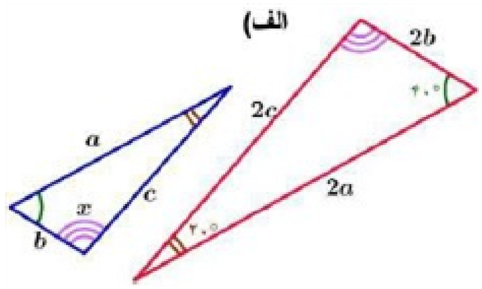
ب)



پ)

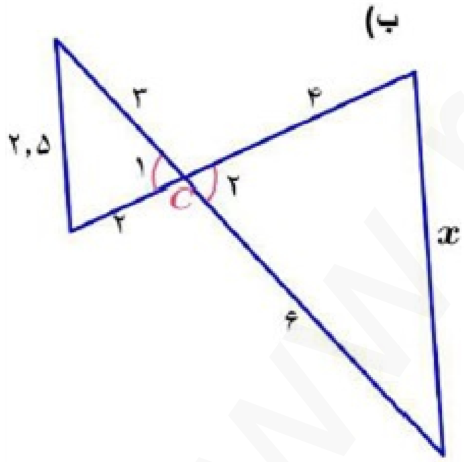


پاسخ: **۱** الف) چون $۲ = \frac{۲c}{c} = \frac{۲b}{b} = \frac{۲a}{a}$ پس سه ضلع متناسب هستند در نتیجه دو مثلث متشابه‌اند بنابراین زاویه‌های متناظر آن‌ها برابر است پس:



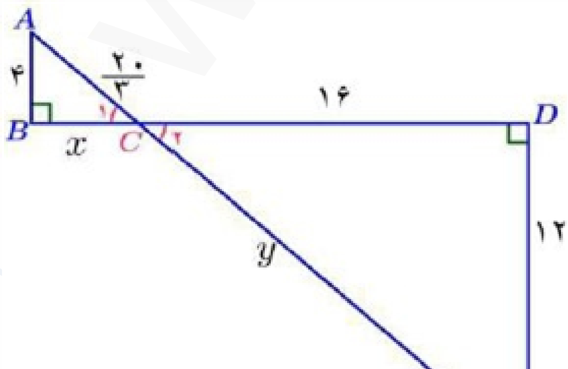
$$x + ۶۰^\circ + ۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ - ۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow x = ۱۰۰^\circ$$

ب) چون $۲ = \frac{۴}{۲} = \frac{۶}{۳}$ و $\widehat{C}_۱ = \widehat{C}_۲$ پس بنا به حالت تناسب دو ضلع و برابر زاویه بین این دو ضلع این دو مثلث متشابه‌اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. پس داریم:



$$۲ = \frac{۶}{۳} = \frac{۴}{۲} = \frac{x}{۲/۵} \Rightarrow \frac{x}{۲/۵} = ۲ \Rightarrow x = ۵$$

پ) چون $\widehat{B} = \widehat{D} = ۹۰^\circ$ و $\widehat{C}_۱ = \widehat{C}_۲$ پس بنا به حالت برابری دو زاویه این دو مثلث متشابه‌اند. در نتیجه سه ضلع متناسب هستند. لذا داریم:

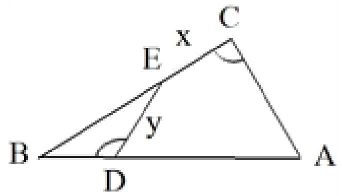


$$\frac{۱۶}{x} = \frac{۱۲}{۴} = \frac{y}{\frac{۲۰}{۳}}$$

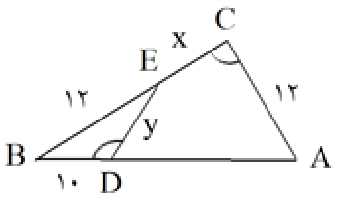
$$\begin{cases} \frac{۱۶}{x} = \frac{۱۲}{۴} \Rightarrow x = \frac{۱۶ \times ۴}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳} \\ \frac{۱۲}{۴} = \frac{y}{\frac{۲۰}{۳}} \Rightarrow y = \frac{۱۲ \times \frac{۲۰}{۳}}{۴} \Rightarrow y = \frac{۱۲ \times ۲۰}{۴ \times ۳} \end{cases}$$

$\Rightarrow y = ۲۰$

۳۸ در شکل زیر $B\widehat{D}E = A\widehat{C}B$ اگر $BE = AC = ۱۲$ و $BD = ۱۰$ و $AB = ۴۰$ مجهولات را بیابید.



پاسخ: ۱

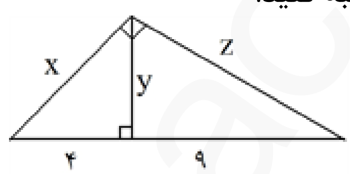


$$(\widehat{C} = B\widehat{D}E, \widehat{B} = \widehat{B}) \Rightarrow B\overset{\triangle}{D}E \sim A\overset{\triangle}{B}C$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲}{۴۰} = \frac{y}{۱۲} = \frac{۱۰}{x+۱۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴۰y = ۱۴۴ \Rightarrow y = \frac{۱۸}{۵} \\ ۱۲x + ۱۴۴ = ۴۰۰ \Rightarrow x = \frac{۶۴}{۳} \end{cases}$$

۳۹ در شکل زیر، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



پاسخ: ۱ در مثلث ABC می‌توان نوشت:

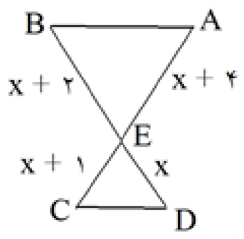
$$\mathrm{AH}^۲ = \mathrm{BH} \times \mathrm{CH} \Rightarrow y^۲ = ۴ \times ۹ \Rightarrow y = ۲ \times ۳ = ۶$$

حال با به کار بردن قضیه فیثاغورس در هر دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH داریم:

$$\mathrm{ABH} : \mathrm{AB}^۲ = \mathrm{AH}^۲ + \mathrm{BH}^۲ \Rightarrow x^۲ = ۶^۲ + ۴^۲ \Rightarrow x = \sqrt{۵۲} = \sqrt{۴ \times ۱۳} = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$\mathrm{ACH} : \mathrm{AC}^۲ = \mathrm{AH}^۲ + \mathrm{CH}^۲ \Rightarrow z^۲ = ۶^۲ + ۹^۲ \Rightarrow z = \sqrt{۱۱۷}$$

۴۰ در شکل مقابل $\mathrm{CD} \parallel \mathrm{AB}$ می‌باشد.
الف) ثابت کنید دو مثلث ABE و ECD متشابه هستند.
ب) نسبت مساحت‌های دو مثلث را به دست آورید.



پاسخ: ۱ آ)

$$\mathrm{DC}\ |\mathrm{AB}| \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{B}, \widehat{A} = \widehat{C} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} A\overset{\triangle}{B}E \sim D\overset{\triangle}{C}E$$

ب) نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با مربع نسبت تشابه برابر است.

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AE}} \Rightarrow \frac{x}{x+۲} = \frac{x+۱}{x+۴} \Rightarrow x(x+۴) = (x+۱)(x+۲) \Rightarrow \cancel{x^۲} + ۴x = \cancel{x^۲} + ۳x + ۲$$

$$\Rightarrow x = ۲ \Rightarrow k = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BE}} = \frac{x}{x+۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{S_{\mathrm{DEC}}}{S_{\mathrm{AEB}}} = k^۲ = \frac{۱}{۴}$$


دکتر الهه بنام
مدرس زیست رپیتیچ
مهندس شهاب نصیری
مدرس فیزیک رپیتیچ
مهندس علی داودوندی
مدرس ریاضی رپیتیچ
دکتر متین هوشیار
مدرس شیمی رپیتیچ
رپیتیچ
سریعتر یاد بگیـــــــــــــــــــــر...!
با اســاتید رتبه بــرتر و رتبــه پرور
بــه همــراه مشــاورین رتبــه برتر
تــو هــم رتبه برتــر میشــی رفیق
rapiteach.com