رایگان

شب امتحان

ریاضی یازدهم

دانلود جزوات
شب امتحان

رپیتیچ

ویدیو های
شب امتحان

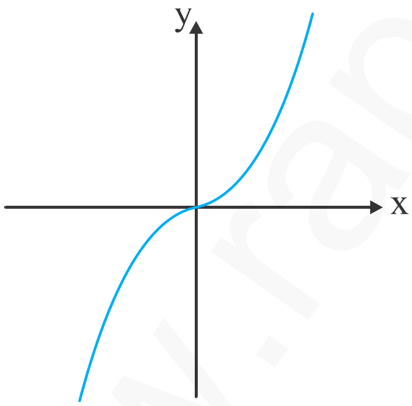
سریعتر یادبگیریا

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان	
علی داودوندی رتبه ۶۱ کنکور ریاضی	مدرس ریاضی رپیتیچ
فصل ۳ : تابع	پایه یازدهم

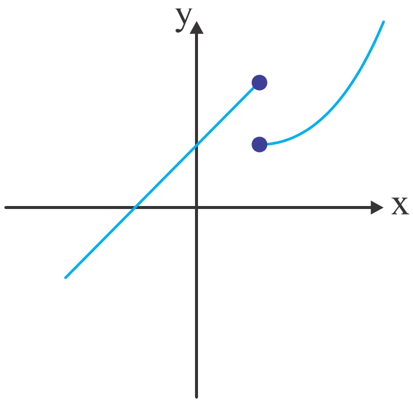
فصل ۳: تابع

تابع:

یادآوری: رابطهٔ f از A به B در صورتی تابع است که به ازای هر x از A دقیقاً یک y از B موجود باشد. سال گذشته گفتیم که اگر y توان زوج داشت یا داخل قدرمطلق بود، یا علامت‌های $\pm$ با هم مشاهده شد، معمولاً تابع نداریم؛ مثلاً روابط $y^۲ = x^۳ + ۶$ ، $|y| + ۲x = ۱$ و $y = \pm\sqrt{x}$ تابع نیستند، ولی روابط $y^۳ = ۵x - ۱$ و $y = |x - ۲|$ تابع‌اند. از نظر نموداری، هر خط موازی محور yها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند مثلاً نمودار (الف) تابع است ولی نمودار (ب) تابع نیست.



(الف)



(ب)

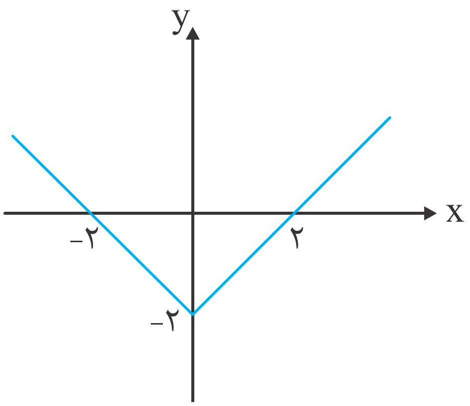
نکته: می‌دانیم یک تابع با ضابطه و دامنهٔ آن مشخص می‌شود، حتی اگر ضابطه‌ها مساوی باشند ولی دامنه‌ها یکسان نباشند؛ توابع مختلفی ایجاد خواهد شد.

مثال: ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x) = |x| - ۲$ است. نمودار f را با دامنهٔ R رسم کنید. سپس نمودار آن را در حالت‌های زیر رسم کنید.

الف) $D_g = R - \{۴\}$

ب) $D_h = [-۲,۰) \cup$

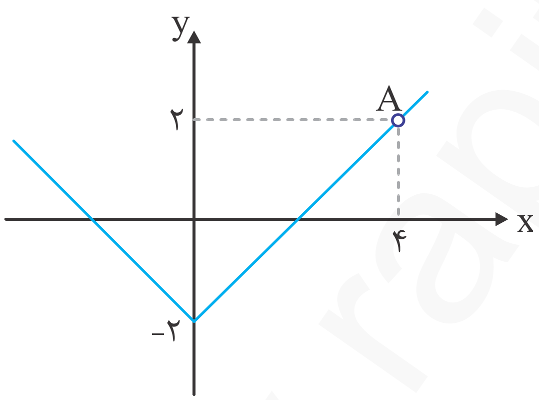
حل: برای رسم تابع $f(x)$ می‌دانید که باید نمودار $|x|$ را ۲ واحد به پایین انتقال دهیم:



$f(x) = |x| - ۲$

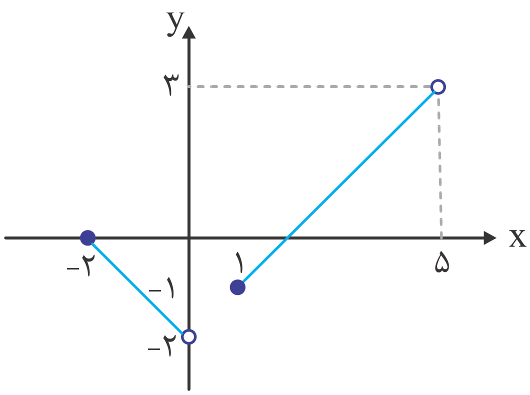
$D_f = R$

الف) $x = ۴$ را در تابع $y = |x| - ۲$ قرار دادیم، y برابر ۲ شد، پس نقطهٔ $A(۴,۲)$ را توخالی کردیم.



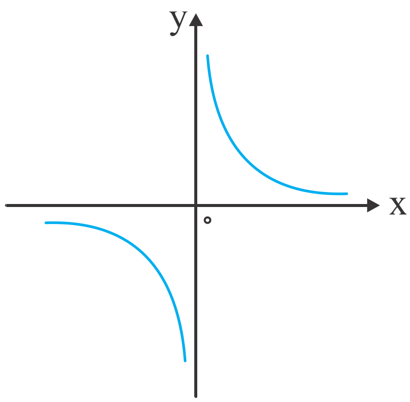
$g(x) = |x| - ۲ \ , \ D_g = R - \{۴\}$

ب)



$h(x)=|x|-۲\ ,\ D_h=[-۲,۰)\cup$

تابع گویا



به تابعی که بتوان ضابطه‌اش را به شکل $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ نوشت به طوری که $f(x)$ و $g(x)$ هر دو چند جمله‌ای باشند تابع گویا می‌گوییم (البته g نباید صفر باشد). یک تابع گویای معروف، تابع $y=\frac{۱}{x}$ است که نمودار آن به صورت مقابل است: (به x چند عدد مثبت و منفی بدهید و yها را پیدا کرده، سپس نقاط را به هم وصل کنید.)

$D_y=R-\{۰\}$

برای یافتن دامنهٔ تابع گویای $\frac{f}{g}$، ابتدا g را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه یا ریشه‌های آن (در صورت وجود) به دست آیند، سپس خواهیم داشت: $D_y=R-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

مثال: دامنهٔ توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=\frac{x-۱}{x^۳-x^۲}$

ب) $y=\frac{۵}{x^۲+۹}$

پ) $y=\dfrac{\sqrt{۳}}{x^{۲}-۵x-۶}$

حل:

الف) $\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^{۲}(x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x^{۲}=۰\Rightarrow x=۰\\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱\end{cases}$

$\Rightarrow D_y=R-\{۰,۱\}$

ب) $\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^{۲}+۹=۰\Rightarrow x^{۲}=-۹$ جواب ندارد

$\Rightarrow D_y=R$

پ) $\text{مخرج}=۰\Rightarrow (x-۶)(x+۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۶\\ x=-۱\end{cases}$

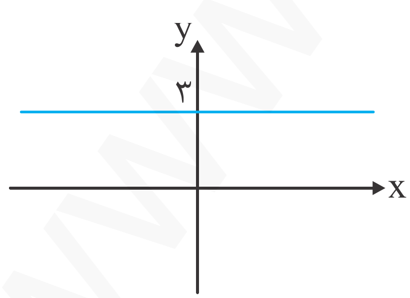
$\Rightarrow D_y=R-\{-۱,۶\}$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g در صورتی برابرند که هم ضابطه‌هایشان و هم دامنه‌هایشان با هم برابر باشند، به عبارت دیگر نمودار f و g باید کاملاً بر هم منطبق شوند. ضمناً در بررسی سؤالات مربوط به این مبحث، حواستان باشد که اگر ضابطهٔ تابعی، قابل ساده کردن بود ابتدا دامنه‌اش را حساب کنید سپس تابع را ساده کنید.

مثال: آیا توابع $f(x)=۳$ و $g(x)=\dfrac{۳x^{۲}-۳}{x^{۲}-۱}$ با هم برابرند؟ دامنهٔ آن‌ها را یافته و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

حل:



$f(x)=۳\ ,\ D_f=R$

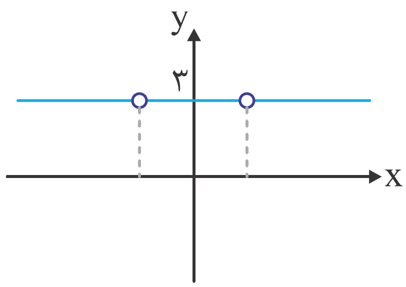
$g(x)=\dfrac{۳x^{۲}-۳}{x^{۲}-۱}$

یافتن دامنهٔ g: $\text{مخرج}=۰\Rightarrow x^{۲}-۱=۰\Rightarrow x^{۲}=۱$

$\xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm۱\Rightarrow D_g=R-\{\pm۱\}$

حالا که دامنهٔ g را به دست آوردیم ضابطهٔ g را ساده‌تر می‌کنیم:

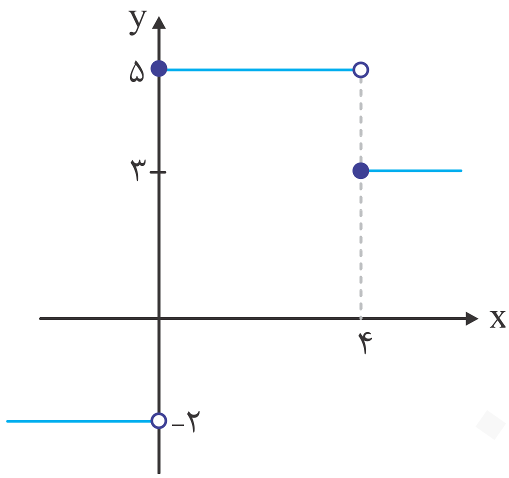
$$g(x)=\frac{۳\cancel{(x^۲-۱)}}{\cancel{x^۲-۱}}=۳$$



پس $f\neq g$ است، چون فقط ضابطه‌های f و g برابرند ولی دامنه‌ها یکسان نیستند.

تابع پله‌ای

تابعی است که بتوان دامنهٔ آن را به شکل تعدادی بازهٔ جدا از هم نوشت و به هر یک از این بازه‌ها فقط یک عدد در برد نسبت داد. در واقع تابع پله‌ای، نوعی تابع چندضابطه‌ای مانند تابع زیر است:



$$f(x)=\begin{cases}-۲ & x<۰\\ ۵ & ۰\leq x<۴\\ ۳ & x\geq ۴\end{cases}$$

مفهوم جزء صحیح (براکت)

جزء صحیح یک عدد صحیح، برابر است با خود آن عدد یعنی:

$$\begin{cases}[-۳]=-۳\\ [۸]=۸\\ [۰]=۰\end{cases}$$

جزء صحیح یک عدد غیرصحیح (عدد اعشاری) برابر است با نزدیک‌ترین عدد صحیحی که روی محور اعداد در سمت چپ آن عدد قرار دارد، مثلاً:

$$[۳/۸]=[۳],[-۵/۹۸]=-۶$$

$$[\frac{۴۳}{۳۶}]=[۱/۱۹]=۱,[۱-\sqrt{۲}]=[۱-۱/۴]=[-۰/۴]=-۱$$

پس به طور کلی می‌توان گفت:

$$\boxed{k\le x<k+۱\Leftrightarrow[x]=k}$$

تابع جزء صحیح

ساده‌ترین تابع براکتی به صورت $y=[x]$ می‌باشد که در واقع با انتخاب بازه‌های مختلف برای x می‌تواند به یک تابع پله‌ای تبدیل شود.

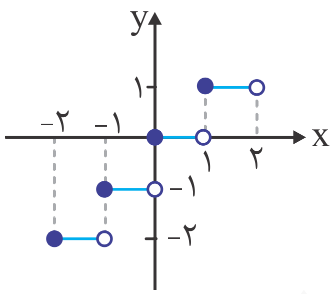
مثلاً اگر بخواهیم نمودار آن را در بازۀ $[-۲,۲)$ رسم کنیم، باید این بازه را به بازه‌های کوچک‌تر تبدیل کنیم که در هر بازه، جزء صحیح x فقط یک عدد باشد:

$$-۲\le x<-۱\ \Rightarrow\ [x]=-۲\ \Rightarrow\ y=-۲$$

$$-۱\le x<۰\ \Rightarrow\ [x]=-۱\ \Rightarrow\ y=-۱$$

$$۰\le x<۱\ \Rightarrow\ [x]=۰\ \Rightarrow\ y=۰$$

$$۱\le x<۲\ \Rightarrow\ [x]=۱\ \Rightarrow\ y=۱$$



نکته: اگر k عددی صحیح باشد، آن‌گاه:

۱) $[x\pm k]=[x]\pm k\xrightarrow{\text{مثال}}[x+۳]=[x]+۳$

۲) $[kx]\ne k[x]\xrightarrow{\text{مثال}}[۲x]\ne ۲[x]$

اگر $x,y\in N$ باشند، آن‌گاه: ۳) $[x]+[y]=[x+y]$

اگر $x\in R$ و $y\in N$ باشند، آن‌گاه: ۴) $[x]+[y]=[x+y]$

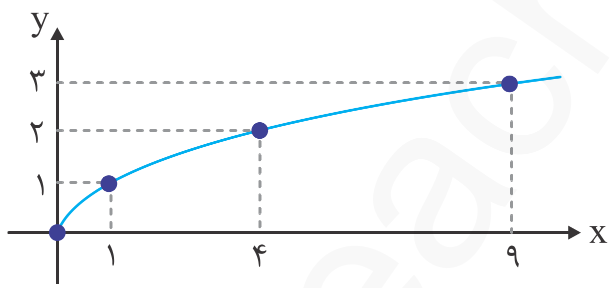
$$۵)\ [x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in Z \\ -۱ & x\notin Z \end{cases}$$

رسم یک نمودار معروف دیگر

ساده‌ترین تابع رادیکالی، به شکل $y=\sqrt{x}$ می‌باشد که برای رسم آن از نقطه‌یابی استفاده می‌کنیم (به x نمی‌توان اعداد منفی داد.)

$y=\sqrt{x}$

x	۰	۱	۴	۹
y	۰	۱	۲	۳



رسم نمودار توابع مختلف به کمک انتقال

اگر نمودار $f(x)$ معلوم باشد و k عددی مثبت باشد، خواهیم داشت:

۱) برای رسم نمودار $f(x+k)$، نمودار f را k واحد به چپ انتقال می‌دهیم و برای رسم نمودار $f(x-k)$، نمودار f را k واحد به راست انتقال می‌دهیم.

۲) برای رسم نمودار $f(x)+k$، نمودار f را k واحد به بالا انتقال می‌دهیم و برای رسم نمودار $f(x)-k$، نمودار f را k واحد به پایین حرکت می‌دهیم.

۳) برای رسم نمودار $kf(x)$، عرض تمام نقاط f را در عدد k ضرب می‌کنیم.

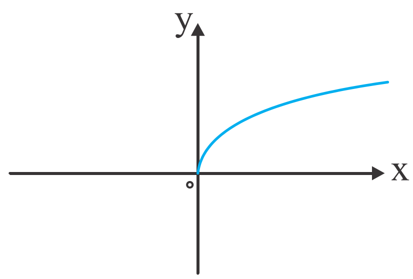
۴) برای رسم نمودار $-f(x)$، نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۳ - \sqrt{x - ۲}$

ب) $y = \dfrac{۴}{x + ۱}$

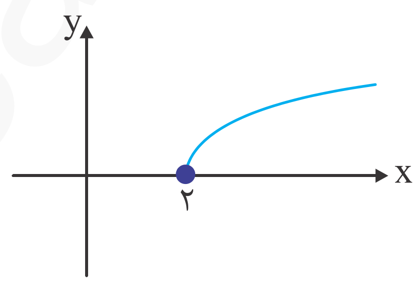
حل: الف)



$y = \sqrt{x}$

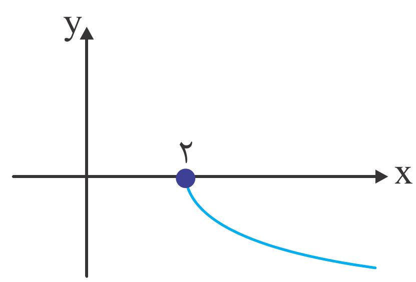
$x - ۲ = ۰ \longrightarrow x = ۲$

۲واحد به راست

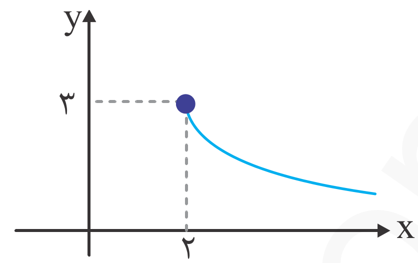


$y = \sqrt{x - ۲}$

قرینه نسبت به محور xها



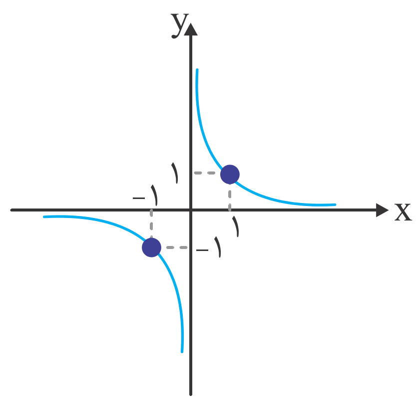
$y = -\sqrt{x - ۲}$



۳ واحد به بالا $\longrightarrow$

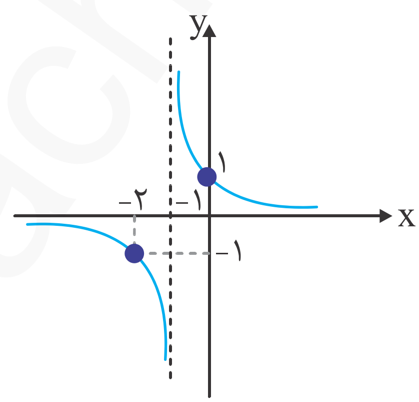
$$y = -\sqrt{x-۲}+۳ = ۳-\sqrt{x-۲}$$

ب)



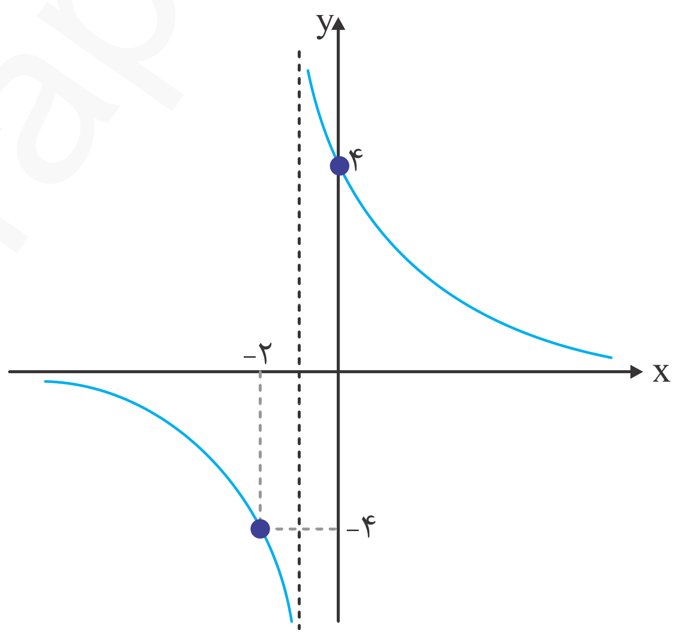
$y = \frac{۱}{x}$

$\xrightarrow[\text{۱ واحد به چپ}]{x+۱=۰ \ \rightarrow\ x=-۱}$



$y = \frac{۱}{x+۱}$

$\xrightarrow[\text{۴ ضرب می‌شود.}]{\text{عرض تمام نقاط در}}$

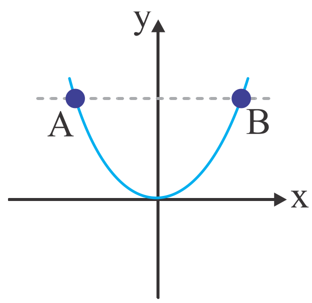


درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به یک

تابع یک‌به‌یک

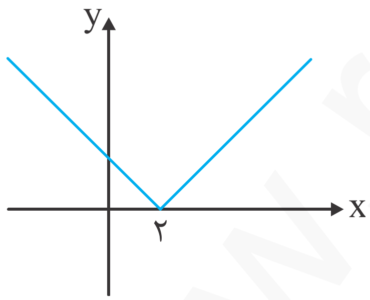
هرگاه تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج‌مرتب‌ها داده شود، وقتی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، عضو دوم مساوی نداشته باشند. مثلاً $f=\{(۱,۴),(۵,۹),(۳,۶)\}$ یک‌به‌یک است ولی $g=\{(۲,۹),(۳,۶),(۷,۹)\}$ یک‌به‌یک نیست؛ زیرا ۹ عضو دوم مشترک در دو زوج مرتب است.

از نظر نموداری، تابعی یک‌به‌یک است که هر خط افقی دلخواه، نمودارش را حداکثر در یک نقطه قطع کند؛ مثلاً نمودار تابع روبه‌رو یک‌به‌یک نیست:

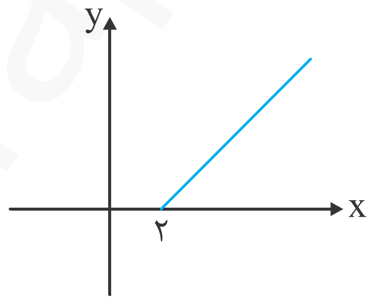


محدود کردن دامنه برای یک‌به‌یک شدن تابع

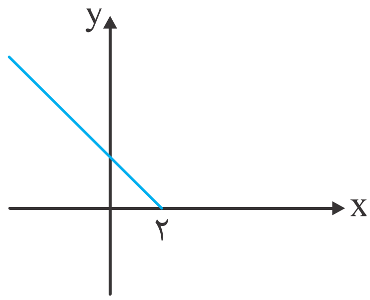
گاهی اوقات تابعی مانند f در دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست، ولی اگر دامنه‌اش را محدود کنیم یک‌به‌یک می‌شود. به عنوان مثال تابع $f(x)=|x-۲|$ در دامنه‌اش یعنی R یک‌به‌یک نیست، ولی اگر دامنهٔ آن را به $[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,۲]$ محدود کنیم؛ تابع جدید، یک‌به‌یک خواهد شد. (البته در هر زیربازه از این دو بازه هم، f یک‌به‌یک است.)



$f(x)=|x-۲|$
$D_f=R$
(یک‌به‌یک نیست)



$g(x)=|x-۲|$
$D_g=[۲,+\infty)$
(یک‌به‌یک است)



$h(x)=|x-۲|$
$D_h=(-\infty,۲]$
(یک‌به‌یک است)

نکته: سهمی‌های با معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ در کل دامنه‌شان یعنی R یک‌به یک نیستند، ولی در بازه‌های $[\frac{-b}{۲a}, +\infty)$ و $(-\infty, \frac{-b}{۲a}]$ یا هر زیربازه‌ای از این دو بازه، یک‌به‌یک هستند (می‌دانید طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{۲a}$ است.) مثلاً سهمی $y = x^۲ - ۴x$ در R غیریک‌به‌یک است، ولی در بازه‌های $[۲, +\infty)$ و $(-\infty, ۲]$ یک‌به‌یک است.

وارون تابع (معکوس)

اگر در تابع f جای x و yها را با هم عوض کنیم وارون f به دست می‌آید، مثلاً:

$$f = \{(۱,۶), (۷,۲), (۳,۱۰)\} \Rightarrow f^{-۱} = \{(۶,۱), (۲,۷), (۱۰,۳)\}$$

ولی آیا وارون یک تابع، همیشه خودش هم تابع است؟ جواب، منفی است. وارون f در صورتی، خودش تابع است که f یک‌به‌یک است، پس $f^{-۱}$ هم تابع است ولی مثلاً اگر $g = \{(۳,۶), (۵,۲), (۰,۶)\}$ باشد، $g^{-۱}$ قطعاً تابع نیست، چون تابع g یک‌به‌یک نیست:

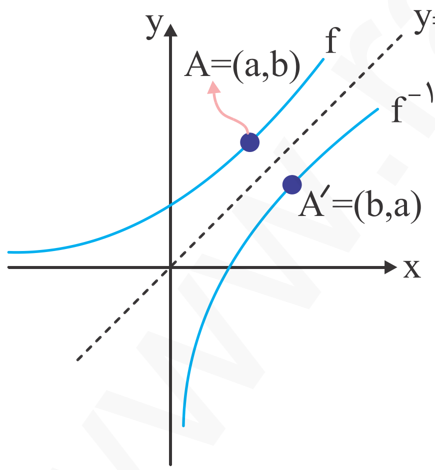
$$g^{-۱} = \{(۶,۳), (۲,۵), (۶,۰)\}$$

نتایج مهم این بحث:

۱) وارون تابع f وقتی تابع است که f یک به یک باشد.

۲) دامنهٔ f با برد $f^{-۱}$ و برد f با دامنهٔ $f^{-۱}$ برابر است.

۳) نمودارهای f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه هستند.



$$A(a,b) \in f \Leftrightarrow A'(b,a) \in f^{-۱}$$

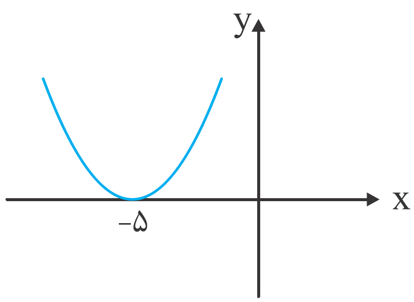
یافتن ضابطهٔ $f^{-۱}$

برای این‌کار ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم، سپس نام x را به y یا $f^{-۱}$ و نام y را به x تغییر می‌دهیم.

البته دقت کنید تابع f حتماً باید یک‌به‌یک باشد وگرنه نمی‌توان $f^{-۱}$ را به دست آورد.

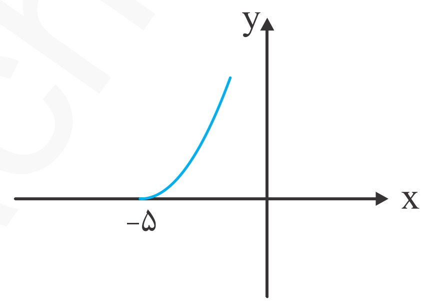
مثال: وارون‌پذیری تابع $f(x)=(x+۵)^۲$ را با شرط $x\geq -۵$ بررسی کرده سپس ضابطهٔ تابع وارون را در صورت وجود به دست آورید.

حل:



$$y=(x+۵)^۲ \qquad D_y=R$$

$$\xrightarrow[\text{دامنه را محدود می‌کنیم.}]{\text{با شرط } x\geq -۵}$$



$$y=(x+۵)^۲ \qquad D_y=[-۵,+\infty)$$

این تابع یک‌به‌یک است.

یافتن تابع وارون : $y=(x+۵)^۲ \xrightarrow[x\geq -۵]{\text{جذر}} x+۵=\sqrt{y}$

$$\Rightarrow x=\sqrt{y}-۵ \xrightarrow[\text{می‌کنیم.}]{\text{اسم‌ها را عوض}} y=\sqrt{x}-۵$$

$\downarrow$

y همان $f^{-۱}$ است

درس سوم: اعمال جبری روی توابع

اگر f و g به صورت زوج مرتبی باشند، برای محاسبهٔ $f+g$، $f-g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ ابتدا xهای مشترک دامنه‌های f و g را پیدا می‌کنیم، سپس عملیات ریاضی مورد نظرمان را روی yها انجام می‌دهیم. به عنوان مثال:

$f=\{(۱,۹),(۵,۶),(۰,۱۰),(۲,۲۰)\}$

$g=\{(۳,-۱),(۵,۸),(۷,۱),(۲,۳)\}$

$$f+g=\{(۵,۶+۸),(۲,۲۰+۳)\}=\{(۵,۱۴),(۲,۲۳)\}$$

$$f-g=\{(۵,۶-۸),(۲,۲۰-۳)\}=\{(۵,-۲),(۲,۱۷)\}$$

$$f\times g=\{(۵,۶\times ۸),(۲,۲۰\times ۳)\}=\{(۵,۴۸),(۲,۶۰)\}$$

$$\frac{f}{g}=\{(۵,\frac{۶}{۸}),(۲,\frac{۲۰}{۳})\}=\{(۵,\frac{۳}{۴}),(۲,\frac{۲۰}{۳})\}$$

دقت کنید اگر مثلاً در محاسبات مربوط به یک مسئله به عبارتی شبیه $(۲,\frac{۵}{۰})$ رسیدیم (مخرج صفر ظاهر شد) کل این زوج مرتب را حذف می‌کنیم. حال سراغ فرمول‌ها می‌رویم. اگر ضابطهٔ f و g را داشته باشیم، آن‌گاه برای اعمال بین آن‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\(f-g)(x)=f(x)-g(x)\\(f.g)(x)=f(x).g(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap \qquad\qquad |\, g=۰\}$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x^۲-۴}$ و $g(x)=x^۲-۹$ باشند، ضابطه و دامنهٔ $(f+g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$ را به دست آورید.

حل:

$$D_f=R-\{\pm ۲\},D_g=R$$

ضابطه‌ها : $$\begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{x-۱}{x^۲-۴}+x^۲-۹\\[2ex](\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\frac{x-۱}{x^۲-۴}}{\frac{x^۲-۹}{۱}}=\dfrac{x-۱}{(x^۲-۴)(x^۲-۹)}\end{cases}$$

دامنه‌ها : $\begin{cases} D_{f+g} = D_f \cap \qquad\qquad \cap \\ D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \qquad\qquad | g = ۰\} \\ = R - \{\pm ۲\} - \{x | \underbrace{\qquad\qquad} \qquad - \{\pm ۲, \pm ۳\} \end{cases}$

محاسبهٔ مقدار توابع $f \pm g$، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ای خاص

برای محاسبهٔ عبارتی مثل $(f+g)(۱)$ نیازی نیست تابع $(f+g)$ را بسازیم، سپس به جای xهایش ۱ قرار دهیم، راحت‌تر است که این طور بنویسیم:

$$(f+g)(۱) = f(۱) + g(۱)$$

در مورد بقیهٔ توابع نیز مشابه همین کار را می‌توانیم انجام دهیم.

مثال: اگر داشته باشیم:

$$f(x) = \sqrt{x^۲ + ۳x} \ , \ h(x) = \{(۱,۲), (۳,۵), (۰,۱۱)\} \quad ، \quad g(x) = |۵x + ۲|$$

حاصل $(f.g)(۱)$ ، $(\frac{g}{f})(۲)$ ، $(f-h)(۳)$ و $(\frac{h}{f})(۰)$ را به دست آورید.

حل:

$$(f.g)(۱).g(۱) = \sqrt{۱^۲ + ۳(۱)} \times |۵(۱) + ۲| = ۲ \times ۷ = ۱۴$$

$$(\frac{g}{f})(۲) = \frac{g(۲)}{f(۲)} = \frac{|۵(۲) + ۲|}{\sqrt{۲^۲ + ۳(۲)}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۱۰}}$$

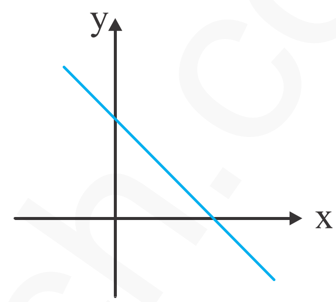
$$(f-h)(۳) = f(۳) - h(۳) = \sqrt{۳^۲ + ۳(۳)} - ۵ = \sqrt{۱۸} - ۵$$

$$(\frac{h}{f})(۰) = \frac{h(۰)}{f(۰)} = \frac{۱۱}{\sqrt{۰^۲ + ۳(۰)}} = \frac{۱۱}{۰} \ \text{(تعریف نشده)}$$

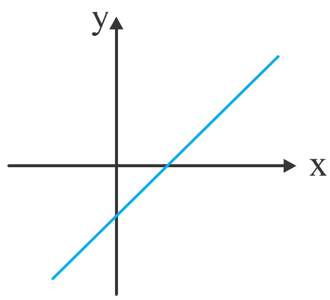
رسم نمودار توابع $f \pm g$، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ به کمک نمودار توابع f و g

برای رسم این‌گونه توابع، ابتدا از فرمول‌های گفته شده استفاده کرده و ضابطه و دامنهٔ این توابع را به دست می‌آوریم، سپس نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم. این روش، دقیق‌ترین روش رسم این‌گونه نمودارهاست.

مثال: با توجه به نمودارهای f و g، نمودار توابع $(f+g)(x)$، $(f\times g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$ را به دست آورید.



$g(x)=-۲x+۴$



$f(x)=x-۲$

حل:

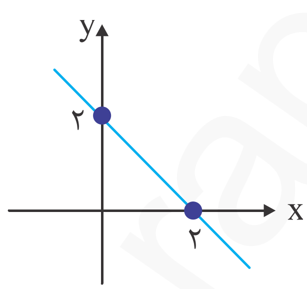
$D_f=R \ , \ D_g=R$

$D_{f+g}=D_f\cap \qquad \cap$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x-۲)+(-۲x+۴)=-x+۲$

x	۰	۲
y	۲	۰

$\Rightarrow$



f+g

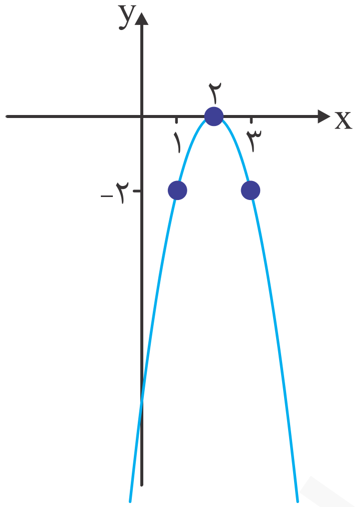
$D_{f.g}=D_f\cap \qquad \cap$

$(f\times g)(x)=f(x).g(x)=(x-۲)(-۲x+۴)$

$-۲x^۲+۴x+۴x-۸=-۲x^۲+۸x-۸$

$\xrightarrow{\text{سهمی است}} x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{۲(-۲)}=۲$

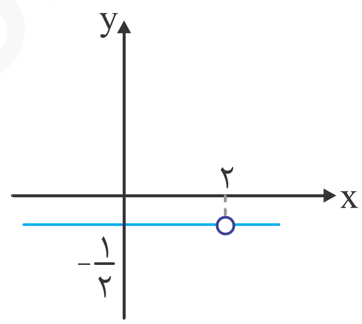
$$\begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline y & -۲ & ۰ & -۲ \end{array} \longrightarrow$$



f.g

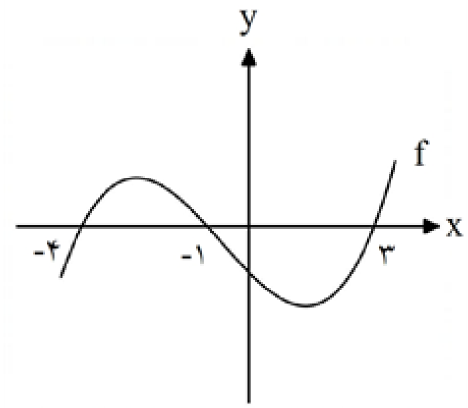
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \qquad | g = \cdot\} = R - \{x \mid \underbrace{\qquad\qquad}_{x=۱} \qquad - \{۲\}$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-۲}{-۲x+۴} = \frac{\cancel{x-۲}}{-۲\cancel{(x-۲)}} = \frac{-۱}{۲}$$

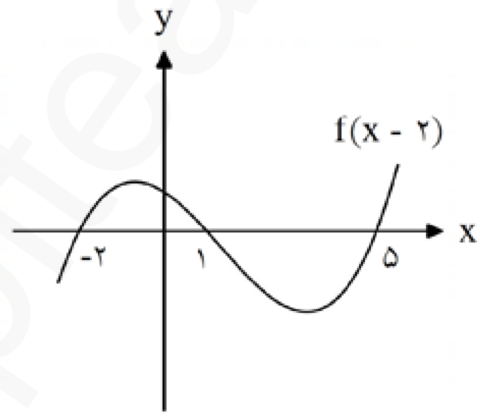


$\frac{f}{g}$

۱ نمودار زیر تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{f(x)\times f(x-۲)}$ را حساب کنید.



پاسخ: ۱ برای رسم تابع $f(x-۲)$ باید نمودار $f(x)$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم.

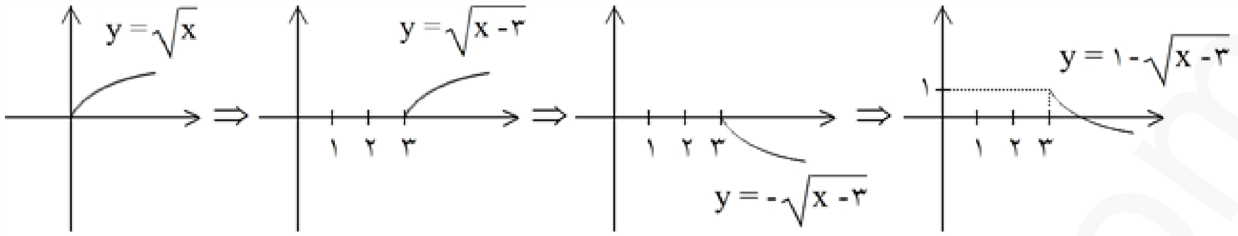


x	-∞	-۴		-۲		-۱		۱		۳		۵	+∞
f(x)	−	•	+		+	•	−		−	•	+		+
f(x - ۲)	−		−	•	+		+	•	−		−	•	+
f(x) × f(x- ۲)	+	•	−	•	+	•	−	•	+	•	−	•	+

$f(x)\times f(x-۲)\geqslant ۰ \Rightarrow D_g=(-\infty,-۴]\cup[-۲,-۱]\cup[۱,۳]\cup[۵,+\infty)$

۲ نمودار تابع $f(x) = ۱ - \sqrt{x - ۳}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ: ۱



$D_f = [۳, +\infty)$

$R_f = (-\infty, ۱]$

۳ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- دو تابع $f(x) = \sqrt{x^۲}$ و $g(x) = x$، با هم برابرند.

پاسخ: ۱ نادرست

۴ دامنه تابع گویای $f(x) = \dfrac{x + ۹}{x^۲ - ۱۶}$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱ باید مخرج کسر را برابر صفر قرار دهیم و دامنه کل اعداد حقیقی به جز ریشه‌های مخرج است.

$x^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = \pm ۴$

$D_f = R - \{\pm ۴\}$

۵ اگر دامنهٔ $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۲}{x^۲ + ۲ax + b - ۱}$ برابر $R - \{۳\}$ باشد، b و a را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$x = ۳ \Rightarrow x - ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم۲}} x^۲ - ۶x + ۹ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲a = -۶ \Rightarrow a = -۳ \\ b - ۱ = ۹ \Rightarrow b = ۱۰ \end{cases}$$

۶ اگر دامنهٔ $f(x) = \dfrac{۵x + ۱۱}{۳x^۲ - ax + ۲b - ۱}$ برابر $R - \{۱, -۴\}$ باشد، b و a را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} x = ۱ \Rightarrow x - ۱ = ۰ \\ x = -۴ \Rightarrow x + ۴ = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\times} (x - ۱)(x + ۴) = x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$$

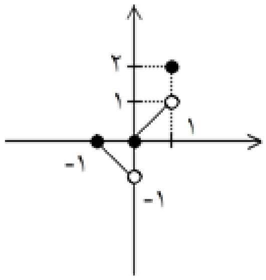
$$\xrightarrow{\times ۳} ۳x^۲ + ۹x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} -a = ۹ \Rightarrow a = -۹ \\ ۲b - ۱ = -۱۲ \Rightarrow ۲b = -۱۱ \Rightarrow b = -\frac{۱۱}{۲} \end{cases}$$

۷ نمودار $y=|x|+[x]$ را در فاصله $[-۱,۱]$ رسم کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

پاسخ: ۱

$-۱ \le x < ۰ \xrightarrow{[x]=-۱} y=-x-۱$

x	-۱	۰
y	۰	-۱



$۰ \le x < ۱ \xrightarrow{[x]=۰} y=x$

x	۰	۱
y	۰	۱

$x=۱ \xrightarrow{[x]=۱} y=۱+۱=۲$

x	۱
y	۲

۸ اگر دو تابع $f(x)=\begin{cases} a & x>c \\ b & x<d \end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{|x-۱|}{x-۱}+۳$ برابر باشند a , b , c , d را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$g(x)=\frac{|x-۱|}{x-۱}+۳=\begin{cases} \dfrac{\cancel{x-۱}}{\cancel{x-۱}}+۳ & x>۱ \\ -\dfrac{\cancel{(x-۱)}}{\cancel{x-۱}}+۳ & x<۱ \end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases} ۴ & x>۱ \\ ۲ & x<۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=۲ \\ c=d=۱ \end{cases}$$

۹ دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x^۳ - ۲۵x}$

ب) $g(x) = \dfrac{۱}{x^۲ - ۱} + \dfrac{۴x - ۱}{x^۲ - ۳x}$

پاسخ: ۱

الف) $D_f : x^۳ - ۲۵x \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۵ \\ x = -۵ \end{cases}$

$p = x^۳ - ۲۵x$

$D_f = [-۵, ۰] \cup [۵, +\infty)$

x	-∞ -۵	۰		۵ +∞
x	-	-	+	+
x^۲ - ۲۵	+	-	-	+
p	-	+	-	+
p ≥ ۰		ج		ج

ج ج ج

ب) $D_g : \begin{cases} x^۲ - ۱ \neq ۰ \Rightarrow x \neq \pm ۱ \\ x^۲ - ۳x \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۰\,,\,۳ \end{cases} \Rightarrow D_g = R - \{۰, ۳, \pm ۱\}$

۱۰ دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۱}{۵-x}}$

ب) $g(x)=\dfrac{x+۱۰}{۳x^۲-x-۲}$

پاسخ: ۱

الف) $D_f:\dfrac{x-۱}{۵-x}\geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۵ \end{cases}$

x	-∞	۱		۵	+∞
x - ۱	-	۰	+		+
۵ - x	+		+	۰	-
	-	۰	+	ت	-
p ≥ ۰			ج		

ج

$D_f=[۱,۵)$

ب) $D_g:۳x^۲-x-۲=۰ \Rightarrow \Delta=۱+۲۴=۲۵ \Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۱\pm\sqrt{۲۵}}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۲}{۳} \end{cases}$

$D_g=R-\left\{۱,-\dfrac{۲}{۳}\right\}$

۱۱ دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۲}{x}-\dfrac{x}{x-۲}}$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$\dfrac{x-۲}{x}-\dfrac{x}{x-۲}\geq ۰ \Rightarrow \dfrac{(x-۲)^۲-x^۲}{x^۲-۲x}\geq ۰ \Rightarrow \dfrac{\cancel{x^۲}-۴x+۴-\cancel{x^۲}}{x^۲-۲x}\geq ۰ \Rightarrow \dfrac{-۴x+۴}{x^۲-۲x}\geq ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۰ \\ x=۲ \end{cases}$

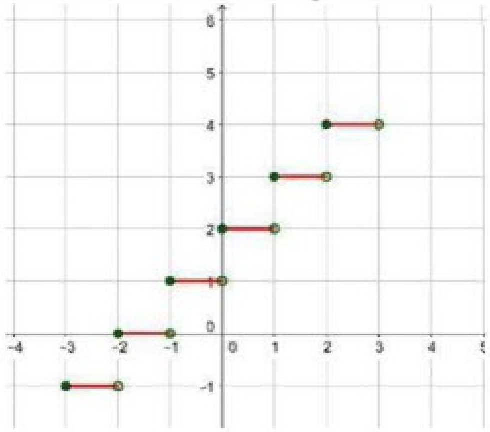
x	-∞	۰		۱		۲	+∞
-۴x + ۴	+		+	•	-		-
x^۲ -۲x	+	•	-		-	•	+
P	+	ت	-	•	+	ت	-
P ≥ ۰	ج				ج		

ج

$D_f=(-\infty,۰)\cup[۱,۲)$

۱۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]+۲$ و دامنه‌ی $D_f=[-۳,۳)$ را رسم کنید.

پاسخ: ۱



$$
\begin{array}{ll}
f(x)=-۳+۲=-۱ & -۳\le x<-۲\\
f(x)=-۲+۲=۰ & -۲\le x<-۱\\
f(x)=-۱+۲=۱ & -۱\le x<۰\\
f(x)=۰+۲=۲ & ۰\le x<۱\\
f(x)=۱+۲=۳ & ۱\le x<۲\\
f(x)=۲+۲=۴ & ۲\le x<۳
\end{array}
$$

۱۳ اگر $[x^۲]=۰$ و $x\neq ۰$ باشد، مقدار عبارت $A=[-x^۴]+[-x^۶]+\cdots+[-x^{۲۰}]$ را بیابید.

پاسخ: ۱

$$[x^۲]=۰\Rightarrow ۰<x^۲<۱\Rightarrow ۰<x^{۲n}<۱\Rightarrow -۱<-x^{۲n}<۰\Rightarrow [-x^{۲n}]=-۱$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{(-۱)+(-۱)+\ldots+(-۱)}_{\text{۹ تا}}=-۹$$

۱۴ مجموعه جواب معادله‌ی $۲[x]^۲+[x-۱]=۰$ را بیابید.

پاسخ: ۱

$$۲[x]^۲+[x]-۱=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}[x]=-۱\Rightarrow x\in[-۱,۰)\\ [x]=\frac{۱}{۲}\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۵ دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{۳-۲[-x]}$ را بیابید.

پاسخ: ۱

$$۳-۲[-x]\ge ۰\Rightarrow [-x]\le\frac{۳}{۲}\Rightarrow [-x]\le ۱\Rightarrow -x<۲\Rightarrow x>-۲\Rightarrow D_f=(-۲,+\infty)$$

۱۶ اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x^{۲}+\mathrm{mx}+۲}$ مجموعه‌ی R باشد حدود m را بیابید.

پاسخ: ۱ باید $\Delta<۰ \Rightarrow m^{۲}-۴(۱)(۲)<۰ \Rightarrow m^{۲}-۸<۰ \Rightarrow m^{۲}<۸ \Rightarrow -۲\sqrt{۲}<m<۲\sqrt{۲}$

۱۷ دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{۴-\sqrt{۲x-۳}}$ را بیابید.

پاسخ: ۱

$۲x-۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq \dfrac{۳}{۲}\ (۱)$

$۴-\sqrt{۲x-۳}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۲x-۳}\leq ۴ \Rightarrow ۰\leq ۲x-۳\leq ۱۶ \Rightarrow \dfrac{۳}{۲}\leq x\leq \dfrac{۱۹}{۲}\ \ (۲)$

$۱\cap ۲=\left[\dfrac{۳}{۲},\dfrac{۱۹}{۲}\right]$

۱۸ مجموعه جواب معادله‌ی $[۲x-۱]=۳$ را بیابید.([] نماد جزء صحیح است.)

پاسخ: ۱

$[۲x-۱]=۳ \Rightarrow ۳\leq ۲x-۱<۴ \Rightarrow ۲\leq x<\dfrac{۵}{۲}$

۱۹ نمودار تابع $f(x)=[۲x]$ را در بازه‌ی $[-۱,۱)$ رسم کنید.

پاسخ: ۱

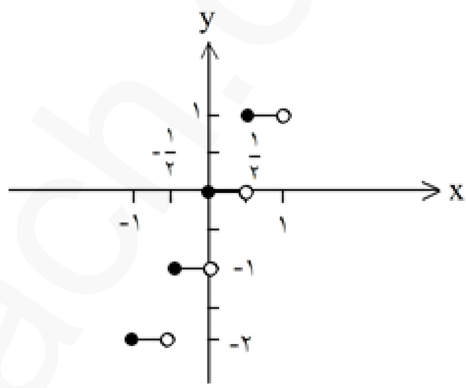
$f(x)=[۲x] \quad x\in[-۱,۱)$

$-۱\leq x<\frac{-۱}{۲}\Rightarrow -۲\leq ۲x<-۱\Rightarrow f(x)=-۲$

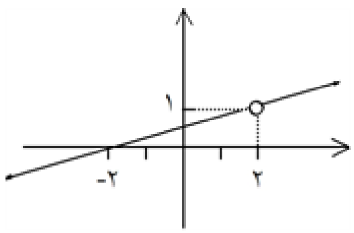
$\frac{-۱}{۲}\leq x\leq ۰\Rightarrow -۱\leq ۲x<۰\Rightarrow f(x)=-۱$

$۰\leq x<\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰\leq ۲x<۱\Rightarrow f(x)=۰$

$\frac{۱}{۲}\leq x<۱\Rightarrow ۱\leq ۲x<۲\Rightarrow f(x)=۱$



۲۰ نمودار یک تابع گویا به صورت زیر است. ضابطه آن‌را بنویسید.



پاسخ: ۱ تابع خطی که از نقطه‌ی $A(۲,۱)$ و $B(-۲,۰)$ می‌گذرد ضابطه‌اش برابر است با:

$f(x)=\mathrm{a}x+b$

$$\left.\begin{array}{l} A(۲,۱)=۲a+b=۱ \\ B(-۲,۰)\Rightarrow -۲a+b=۰ \end{array}\right\} \Rightarrow -۴a=-۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

$f(x)=\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۲}$

چون تابع در $x=۲$ توخالی است بنابراین در $(x-۲)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$y=\frac{(x-۲)\left(\frac{۱}{۴}x+\frac{۱}{۲}\right)}{x-۲}$$

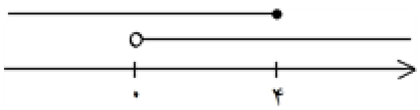
۲۱ دامنه تابع زیر را حساب کنید. $f(x)=\dfrac{\sqrt{۴-x}}{x+|x|}$

پاسخ: ۱

$۴-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq ۴ \quad (۱)$

$x+|x|\neq ۰ \Rightarrow x>۰ \quad (۲)$

$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} D_f=\left(۰,۴\right]$



۲۲ دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{۱-|x-۵|}$ ب) $g(x)=\dfrac{x+۴}{|x-۲|-۷}$

پاسخ: ۱

الف) $۱-|x-۵|\geq ۰ \Rightarrow |x-۵|\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x-۵\leq ۱ \Rightarrow ۴\leq x\leq ۶$

$D_f=[۴,۶]$

ب) $|x-۲|-۷=۰ \Rightarrow |x-۲|=۷ \Rightarrow x-۲=\pm ۷ \Rightarrow x=۹,-۵$

$D_g=R-\{۹,-۵\}$

۲۳ اگر $f(x)=۳x+۵$ باشد مقدار $f^{-۱}(۸)$ را تعیین کنید.

پاسخ: ۱

$۳x+۵=۸ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow (۱,۸)\in f \Rightarrow f^{۱}(۸)=۱$

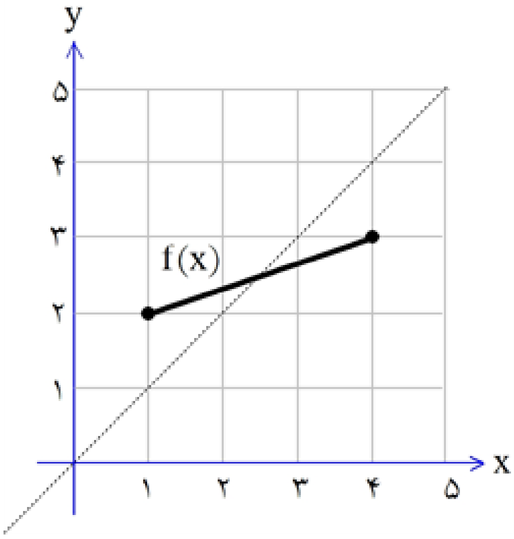
۲۴ دامنه تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ را طوری محدود کنید که تابعی وارون‌پذیر شود.

پاسخ: ۱

$f(x)=(x-۲)^{۲}+۱$

در بازه‌های $[۲,\infty)$ یا $(-\infty,۲]$ یا هر زیرمجموعه این دو بازه تابع یک به یک است.

۲۵ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

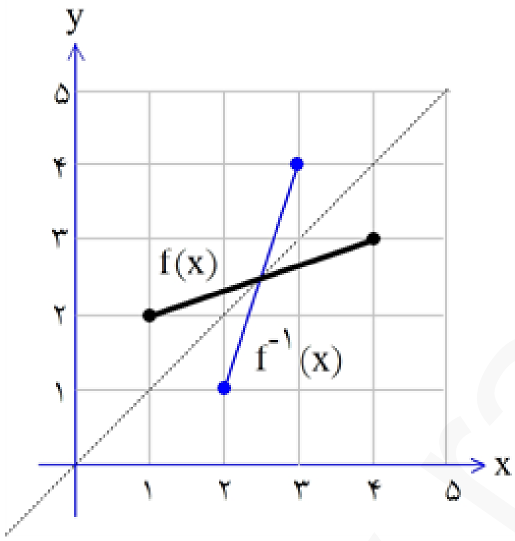


پاسخ: **۱** تابع f از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۴,۳)$ می‌گذرد. بنابراین برای تابع وارون داریم:

$(۱,۲) \in f \Rightarrow (۲,۱) \in f^{-۱}$

$(۴,۳) \in f \Rightarrow (۳,۴) \in f^{-۱}$

بنابراین نمودار $f^{-۱}(x)$ به صورت زیر است.



۲۶ اگر $f=\left\{(۲,۹),(۵,m+۱),(۲,m^{۲}),(۷,۴),(k+۷,-۲)\right\}$ یک تابع یک به یک باشد k و m را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$m^{۲}=۹\Rightarrow\begin{cases}m=۳ & \text{غ ق ق}\\ m=-۳ & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$m=۳\Rightarrow f=\{(۲,۹),(۵,۴),(۲,۹),(۷,۴),(k+۷,-۲)\}$$

به ازای $m=۳$ یک به یک نیست.

$$m=-۳\Rightarrow f=\{(۲,۹),(۵,-۲),(۲,۹),(۷,۴),(k+۷,-۲)\}$$

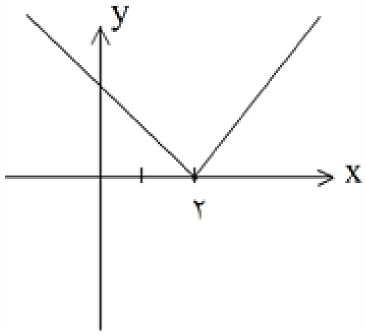
به ازای $m=-۳$ یک به یک است.

$$k+۷=۵\Rightarrow k=-۲$$

بنابراین $m=-۳$ و $k=-۲$ تابع یک به یک است.

۲۷ دامنه تابع $f(x)=|x-۲|$ را چنان محدود کنید که تابع یک به یک باشد.

پاسخ: ۱ با توجه به نمودار تابع دامنه محدود شده باید $[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,۲]$ باشد.



۲۸ نمودار تابعی با دامنه‌ی $[۰, ۲]$ و برد $[۲, ۵]$ را رسم کنید:

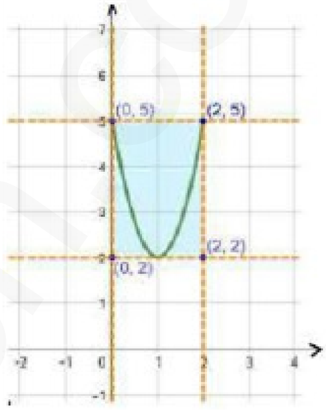
الف) به شرطی که این تابع یک به یک باشد.

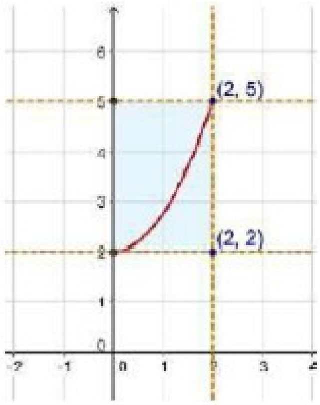
ب) به شرطی که این تابع یک به یک نباشد.

پاسخ: ۱ الف) نمودار تابع‌هایی مانند $g(x) = \frac{-۳}{۲}x + ۵$، $f(x) = \frac{۵}{۲}x$ و $f(x) = \frac{۳}{۴}x^{۲} + ۲$ با دامنه $[۰, ۲]$ و برد $[۲, ۵]$ یک به یک است.

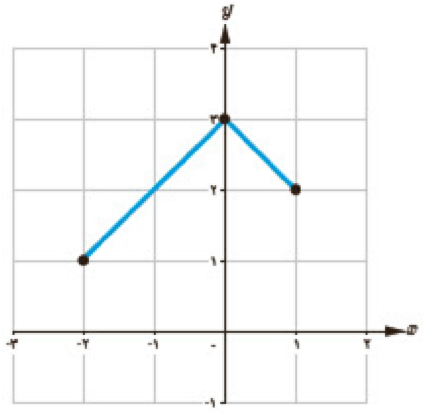
البته بی‌شمار تابع خطی و غیرخطی یک به یک می‌توان پیدا کرد.

ب) نمودار تابع $f(x) = ۳x^{۲} - ۶x + ۵$ با دامنه $[۰, ۲]$ و برد $[۲, ۵]$ رسم شده است این تابع یک به یک نیست.

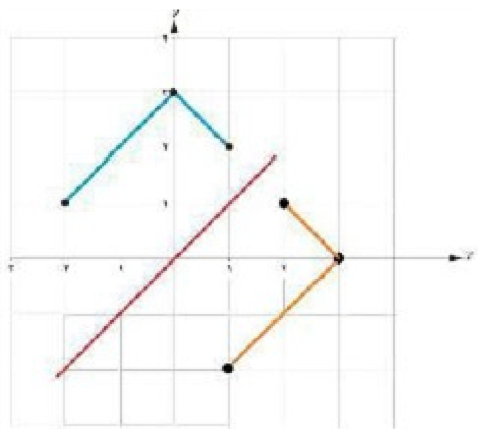




۲۹ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.



پاسخ: ۱



۳۰ اگر f یک تابع خطی و $f^{-۱}(۱) = ۰$ و $f(۲) = ۵$ باشند ضابطه‌ی این تابع را بیابید.

پاسخ: ۱

$$\left.\begin{array}{l} f^{-۱}(۱) = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۱ \Rightarrow a(۰) + b = ۱ \Rightarrow b = ۱ \\ f(۲) = ۵ \Rightarrow a(۲) + \cancel{b}^{۱} = ۵ \Rightarrow ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = ۲x + ۱$$

۳۱ اگر تابع خطی f نمودار $g(x) = x^۲ - ۲x + ۱$ را در نقاطی به طول ۱ و۳ قطع کند، ضابطه‌ی وارون f را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\left.\begin{array}{l} x = ۱ \Rightarrow g(۱) = ۰ \Rightarrow A(۱,۰) \\ x = ۳ \Rightarrow g(۳) = ۴ \Rightarrow B(۳,۴) \end{array}\right\} \Rightarrow m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۴ - ۰}{۳ - ۱} = ۲$$

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۰ = ۲(x - ۱) \Rightarrow y = ۲x - ۲$$

$$y + ۲ = ۲x \xrightarrow{\div ۲} \frac{y + ۲}{۲} = x \xrightarrow{x \longleftrightarrow y} y = \frac{x + ۲}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x + ۲}{۲}$$

۳۲ ضابطه و دامنه‌ی وارون $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱۳x+۳۶}{x-۹}$ را به دست آورید.

پاسخ: **۱**

$$D_f=R-\{۹\}\Rightarrow f(x)=\frac{(x-۴)(x-۹)}{(x-۹)}=x-۴$$

تابع در $(۹,۵)$ تعریف نشده است. بنابراین وارون آن در $(۵,۹)$ تعریف نشده است.

$$y=x-۴\Rightarrow y+۴=x\xrightarrow{x\longleftrightarrow y}f^{-۱}(x)=x+۴$$

$$D_{f^{-۱}}=R-\{۵\}$$

۳۳ اگر $f(x)+f^{-۱}(۲)=۷x+۱۴$ باشد، وارون تابع f را بنویسید.

پاسخ: **۱**

$$(۲,f^{-۱}(۲))\in f^{-۱}\Rightarrow(f^{-۱}(۲),۲)\in f\Rightarrow\begin{cases}x=f^{-۱}(۲)\\ f(x)=۲\end{cases}\Rightarrow ۲+f^{-۱}(۲)=۷f^{-۱}(۲)+۱۴$$

$$\Rightarrow ۶f^{-۱}(۲)=-۱۲\Rightarrow f^{-۱}(۲)=-۲\xrightarrow{f^{-۱}(۲)=-۲}f(x)-۲=۷x+۱۴\Rightarrow f(x)=۷x+۱۶$$

$$y=۷x+۱۶\Rightarrow y-۱۶=۷x\Rightarrow\frac{y-۱۶}{۷}=x\xrightarrow{x\longleftrightarrow y}y=\frac{x-۱۶}{۷}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱۶}{۷}$$

۳۴ اگر f یک تابع خطی باشد و $f(x-۱)+f(x+۲)=۴x+۸$، مقدار $f^{-۱}(۵)$ را حساب کنید.

پاسخ: **۱** چون f یک تابع خطی است. بنابراین:

$$f(x)=ax+b$$

$$f(x-۱)+f(x+۲)=۴x+۸\Rightarrow a(x-۱)+b+a(x+۲)+b=۴x+۸$$

$$\Rightarrow ۲ax+a+۲b=۴x+۸\Rightarrow\begin{cases}۲a=۴\Rightarrow a=۲\\ ۲+۲b=۸\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

$$f(x)=۲x+۳$$

$$f^{-۱}(۵)=k\Rightarrow f(k)=۵\Rightarrow ۲k+۳=۵\Rightarrow ۲k=۲\Rightarrow k=۱\Rightarrow f^{-۱}(۵)=۱$$

۳۵ اگر تابع $f(x)=(a-۱)x^{۲}+۳x+۲a-۱$ در کل اعداد حقیقی یک به یک باشد، $f(۵)$ را حساب کنید.

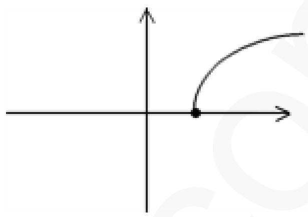
پاسخ: **۱** برای آن‌که تابع در کل اعداد حقیقی یک به یک باشد باید درجه ۲ نباشد بنابراین ضریب $x^{۲}$ را صفر قرار می‌دهیم.

$$a-۱=۰\Rightarrow a=۱\Rightarrow f(x)=۳x+۱\Rightarrow f(۵)=۱۵+۱=۱۶$$

۳۶ به کمک نمودار بررسی کنید، آیا تابع زیر یک‌به‌یک است؟

$$f(x) = \sqrt{x - ۱}$$

پاسخ: ۱ با توجه به شکل هر خط موازی محور xها، تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس f یک به یک است.



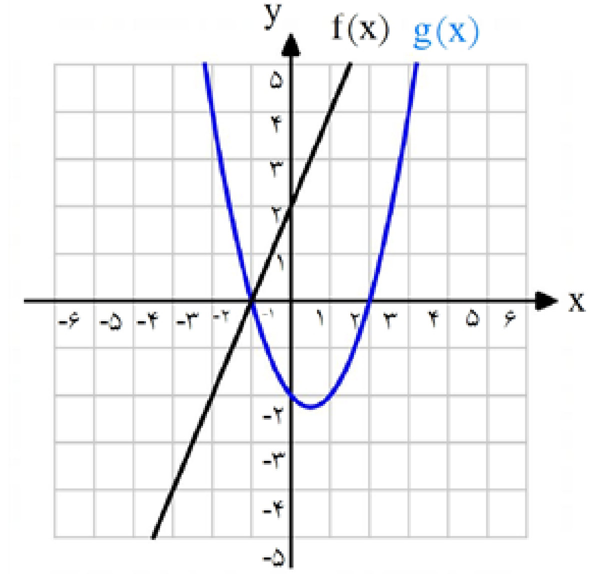
۳۷ اگر $f(x) = \dfrac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x) = x^۲ - ۴$ باشد ضابطه و دامنهٔ تابع $\dfrac{f}{g}$ را تعیین کنید.

پاسخ: ۱

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x+۲}{x-۱}}{x^۲ - ۴} = \frac{x+۲}{(x-۱)(x^۲-۴)} = \frac{۱}{(x-۱)(x-۲)}$$

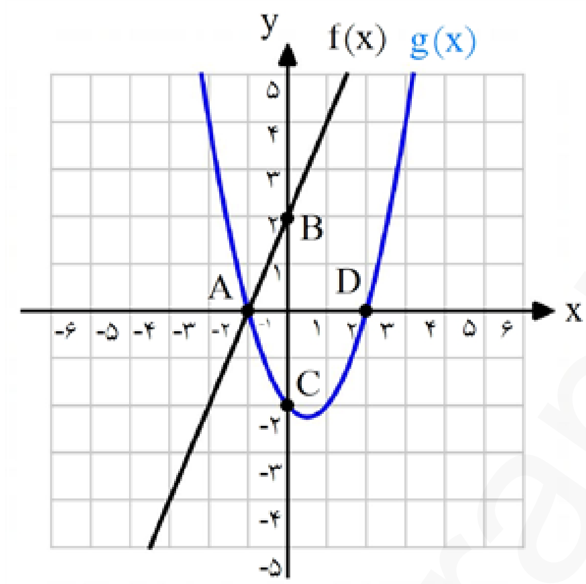
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = (R - \{۱\}) \cap R - \{۲ , -۲\} = R - \{۱ , ۲ , -۲\}$$

۳۸ اگر f تابع خطی و g یک سهمی باشد، با توجه به نمودار آن‌ها جدول زیر را کامل کنید.



تابع	ضابطه تابع
f(x)	
g(x)	
(g - f)(x)	

پاسخ: ۱ با توجه به اینکه f یک تابع خطی و g یک سهمی است، داریم:



$C(۰, -۲)$

$g(x) = a(x+۱)(x-۲) \xrightarrow[\text{می گذرد}]{\text{از نقطه } C} -۲ = a(۰+۱)(۰-۲) \Rightarrow a = ۱$

$\Rightarrow g(x) = (x+۱)(x-۲) = x^{۲} - x - ۲$

$f(x) = \mathrm{c}x + d$

$B(۰, ۲) \Rightarrow c(۰) + d = ۲ \Rightarrow d = ۲$

$A(-۱, ۰) \Rightarrow c(-۱۰) + d = ۰ \Rightarrow -c + ۲ = ۰ \Rightarrow c = ۲$

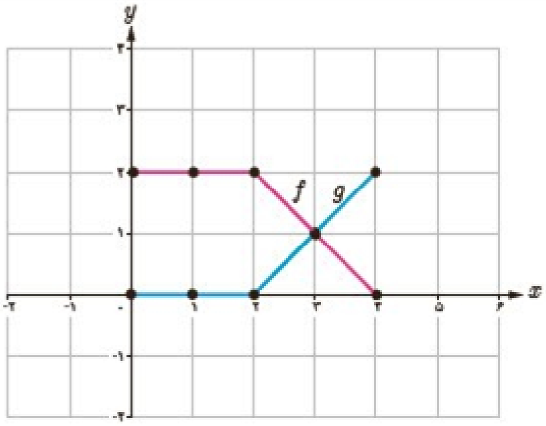
$\Rightarrow f(x) = ۲x + ۲$

$(g-f)(x) = g(x) - f(x) = x^{۲} - x - ۲ - (۲x + ۲) = x^{۲} - x - ۲ - ۲x - ۲$

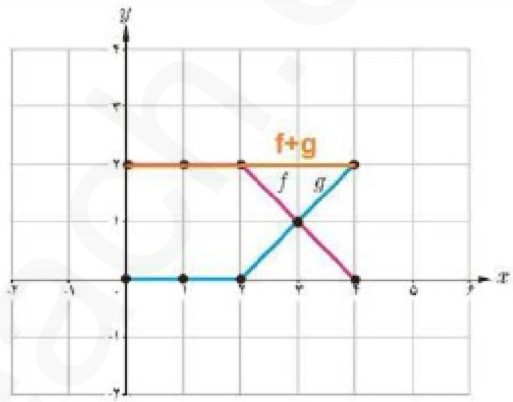
$\Rightarrow (g-f)(x) = x^{۲} - ۳x - ۴$

تابع	ضابطه تابع
f(x)	۲x + ۲
g(x)	$x^{۲}$ - x - ۲
(g - f)(x)	$x^{۲}$ - ۳x - ۴

۳۹ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل‌جمع این دو تابع را به دست آورید.



پاسخ: ۱



۴۰ اگر $f(x) = \sqrt{x+۱}$ و $g(x) = \dfrac{x+۱}{x-۲}$ باشند:

الف) دامنه‌ی تابع $\dfrac{f}{g}$ را به دست آورید.

ب) مقدار $(۲f-g)(۳)$ را محاسبه کنید.

پاسخ: ۱

الف) $D_f = [-۱, +\infty)$ (۰/۲۵) $D_g = R - \{۲\}$ (۰/۲۵)

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = [-۱, +\infty) - \{۲\} - \{-۱\} = (-۱, ۲) \cup (۲, +\infty)$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

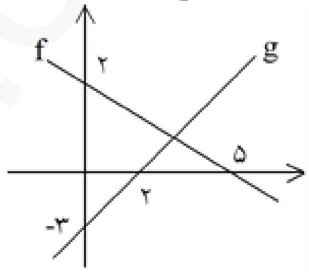
ب) $۲f(۳) - g(۳) = ۲(۲) - ۴ = ۰$ (۰/۲۵)
(۰/۲۵)

۴۱ اگر $f=\left\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),\left(\frac{۵}{۲},۰\right),(۳,-۵)\right\}$ و $g=\{(-۴,-۷),(-۲,۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$ باشد، توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$f+g=\{(-۴,۶),(۰,۲),(۳,-۵)\}$$
$$f-g=\{(-۴,۲۰),(۰,۸),(۳,-۵)\}$$
$$\frac{f}{g}=\left\{\left(-۴,\frac{-۱۳}{۷}\right),\left(۰,\frac{-۵}{۳}\right)\right\}$$

۴۲ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه توابع $f+g$ و $f.g$ را به دست آورید.



پاسخ: ۱

$$\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix},\right|\begin{matrix}۵\\۰\end{matrix}\Rightarrow m=\frac{-۲}{۵}\Rightarrow f(x)=-\frac{۲}{۵}x+۲$$
$$\left|\begin{matrix}۰\\-۳\end{matrix},\right|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\Rightarrow m=\frac{۳}{۲}\Rightarrow g(x)=\frac{۳}{۲}x-۳$$
$$f+g=-\frac{۲}{۵}x+۲+\frac{۳}{۲}x-۳=\frac{۱۱}{۱۰}x-۱$$
$$f.g=\left(-\frac{۲}{۵}x+۲\right)\left(\frac{۳}{۲}x-۳\right)=-\frac{۳}{۵}x^۲+\frac{۲۱}{۵}x-۶$$

۴۳ اگر $f=\{(۱,۲),(۴,۷),(۳,۵),(۵,-۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{x+۶}$، آن‌گاه $(۲f+g)(۳)$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$(۲f+g)(۳)=۲f(۳)+g(۳)=۲\times۵+\sqrt{۳+۶}=۱۰+\sqrt{۹}=۱۳$$

۴۴ اگر $(f+g)(x)=۴x+۱$ و $(f-g)(x)=۲x+۹$ باشد، ضابطه $f(x)$ و $g(x)$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

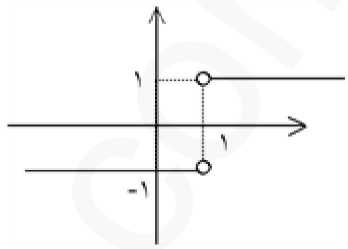
$$\begin{matrix}(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۴x+۱\\(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۲x+۹\end{matrix}\Rightarrow ۲f(x)=۶x+۱۰\Rightarrow f(x)=۳x+۵$$
$$\Rightarrow ۳x+۵+g(x)=۴x+۱\Rightarrow g(x)=x-۴$$

۴۵ اگر $f(x)=\dfrac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}$ باشند، نمودار $y=(f\times g)(x)$ را رسم کنید.

پاسخ: ۱

$$\left.\begin{aligned}D_f&=R-\{۱\}\\ D_g&=R\end{aligned}\right\}\Rightarrow D_{f\times g}=D_f\cap D_g=R-\{۱\}$$

$$y=(f\times g)(x)=\frac{۱}{x-۱}\times\sqrt{(x-۱)^{۲}}=\frac{|x-۱|}{x-۱}=\begin{cases}۱ & x>۱\\ -۱ & x<۱\end{cases}$$



۴۶ توابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\dfrac{۲}{x-۳}$ داده شده‌اند.

الف) دامنه‌ی تابع $\dfrac{g}{f}$ را به دست آورید.

ب) ضابطه‌ی تابع $\dfrac{g}{f}$ را تشکیل دهید.

پ) حاصل عبارت $(۳f-۲g)(-۱)$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱ الف)

$$D_{\frac{g}{f}}=(D_g\cap D_f)-\{x\,|\,f(x)=۰\}$$

$$f(x)=\sqrt{x+۲}$$

$$x+۲\geq ۰\Rightarrow x\geq -۲\Rightarrow D_f=[-۲,+\infty)$$

$$g(x)=\frac{۲}{x-۳}$$

$$x-۳\neq ۰\Rightarrow x\neq ۳\Rightarrow D_g=R-\{۳\}$$

$$D_{\frac{g}{f}}=(R-\{۳\})\cap\Big[-۲,+\infty\Big)-\Big\{x\,|\sqrt{x+۲}=۰\Big\}=\Big(\Big[-۲,+\infty\Big)-\{۳\}\Big)-\{-۲\}$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f}}=(-۲,+\infty)-\{۳\}$$

ب)

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\frac{۲}{x-۳}}{\sqrt{x+۲}}=\frac{۲}{(x-۳)\sqrt{x+۲}}$$

پ)

$$(۳f-۲g)(-۱)=۳f(-۱)-۲g(-۱)=۳\sqrt{-۱+۲}-۲\times\frac{۲}{-۱-۳}=۳-(-۱)=۴$$

۴۷ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}+a$، $g(x)=\sqrt{b-x}+۷$، $(f+g)(۱)=۱۰$ و $D_{f+g}=[۱,۵]$ باشد، b و a را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\left.\begin{array}{l} D_f: x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱ \\ D_g = b-x\geq ۰ \Rightarrow x\leq b \end{array}\right\} \Rightarrow D_{f+g}=[۱,b]\Rightarrow b=۵$$

$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=a+۹=۱۰\Rightarrow a=۱$$

۴۸ توابع $f(x)=x+۵$ و $g(x)=\dfrac{۴x}{x^۲-۷x}$ داده شده‌اند.

الف) دامنه‌ی تابع $\dfrac{g}{f}$ را به دست آورید.

ب) حاصل $(f.g)(۱)$ را تعیین کنید.

پاسخ: ۱

الف) $D_f=R$ ۰/۲۵ , $D_g=R-\{۰,۷\}$ ۰/۲۵

$D_{\frac{g}{f}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,f(x)=۰\}=R-\{۰,-۵,۷\}$ ۰/۲۵

۰/۲۵

ب) $(f.g)(۱)=f(۱)\times g(۱)=۶\times\left(\dfrac{-۴}{۶}\right)=-۴$ ۰/۲۵

۰/۲۵ ۰/۲۵

۴۹ اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۱ \\ ۳x-۲ & x<۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} ۳-۲x & x\geq ۱ \\ ۵x+۳ & x<۱ \end{cases}$ باشد توابع $f\pm g$ را محاسبه نمایید.

پاسخ: ۱

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} ۲x+۱+۳-۲x & x\geqslant ۱ \\ ۳x-۲+۵x+۳ & x<۱ \end{cases}\Rightarrow f(x)+g(x)=\begin{cases} ۴ & x\geqslant ۱ \\ ۸x+۱ & x<۱ \end{cases}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases} ۲x+۱-۳+۲x & x\geqslant ۱ \\ ۳x-۲-۵x-۳ & x<۱ \end{cases}\Rightarrow f(x)-g(x)=\begin{cases} ۴x-۲ & x\geqslant ۱ \\ -۲x-۵ & x<۱ \end{cases}$$

۵۰ توابع f و g داده شده است. تابع‌های $f\pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ و دامنه‌ی آن‌ها را به دست آورید.

$$f(x)=\frac{۲x-۳}{۵}\ ,g(x)=\frac{x}{x-۱}$$

پاسخ: ۱

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{۲x-۳}{۵}+\frac{x}{x-۱}=\frac{۳x^۲-۲x+۳+۵x}{۵(x-۱)}=\frac{۲x^۲+۳}{۵x-۵}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۲x-۳}{۵}-\frac{x}{x-۱}=\frac{۲x^۲-۵x+۳-۵x}{۵(x-۱)}=\frac{۲x^۲-۱۰x+۳}{۵x-۵}$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\frac{۲x-۳}{۵}\times\frac{x}{x-۱}=\frac{۲x^۲-۳x}{۵x-۵}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{۲x-۳}{۵}}{\frac{x}{x-۱}}=\frac{(x-۱)(۲x-۳)}{۵x}=\frac{۲x^۲-۵x+۳}{۵x}$$

$D_f=R$ $\qquad$ $D_g=R-\{۱\}$

$D_{f\pm g}=D_f\cap D_g=R-\{۱\}$

$D_{f.g}=D_f\cap D_g=R-\{۱\}$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}=R-\{۱\}-\{۰\}=R-\{۰,۱\}$

دکتر الهه بنام
مدرس زیست رپیتیچ
مهندس شهاب نصیری
مدرس فیزیک رپیتیچ
مهندس علی داودوندی
مدرس ریاضی رپیتیچ
دکتر متین هوشیار
مدرس شیمی رپیتیچ
رپیتیچ
سریعتر یاد بگیـــــــــــــــر...!
با اساتید رتبه برتر و رتبه پرور
به همراه مشاورین رتبه برتر
تو هم رتبه برتر میشی رفیق
rapiteach.com