

رایگان

شب امتحان

ریاضی یازدهم

ویدیوهای
شب امتحان

رپیتنج

دانلود جزوات
شب امتحان

موسسه تخصصی یادگیریا

درس نامه توپ برای شب امتحان

مدرس ریاضی ریپتیج

علی داودوندی

رتبه ۶۱ کنکور ریاضی

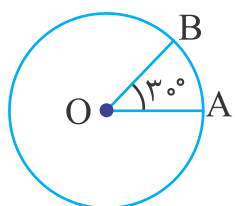
پایه یازدهم

فصل ۴: مثلثات

فصل ۴: مثلثات

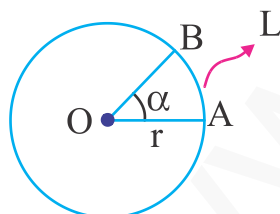
درس اول: واحدهای اندازه گیری زاویه

همه شما با واحد درجه برای اندازه گیری زاویه آشنا هستید. می دانید اگر محیط هر دایره با شعاع دلخواه را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم به هر قسمت ایجاد شده، ۱ درجه می گوئیم. مثلاً در شکل زیر، هم کمان AB و هم زاویه مرکزی روبه روی کمان AB هر دو ۳۰ درجه هستند.



$$\hat{O} = \overset{\frown}{AB} = 30^\circ$$

حال می خواهیم اندازه کمان AB را بر حسب یک واحد طولی مثل کیلومتر، متر یا سانتی متر بیان کنیم. اگر در هر دایره با شعاع دلخواه r طول کمان روبه رو به زاویه α را بر شعاع دایره یعنی r، تقسیم کنیم، مقدار آن زاویه مرکزی (α) به دست می آید؛ ولی نه بر حسب درجه بلکه بر حسب رادیان. ضمناً طول کمان AB را با حرف L



نمایش می دهیم و خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \alpha = \frac{L}{r} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} L = r \cdot \alpha$$

تذکره: اگر کمان روبه روی یک زاویه مرکزی در دایره برابر با شعاع دایره باشد اندازه زاویه مرکزی برابر یک رادیان خواهد بود زیرا:

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$$

مثال: در دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، اندازه کمان مقابل زاویه α برابر ۴۰ سانتی‌متر است. اندازه زاویه α را بر حسب رادیان به دست آورید.

حل:

$$\alpha = \frac{L}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{40}{10} = 4 \text{ rad}$$

تذکر: منظورمان از rad همان رادیان است.

تبدیل درجه به رادیان و رادیان به درجه

برای تبدیل درجه به رادیان، کافی است عدد داده شده را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنید.

مثال:

$$\begin{cases} 30^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ 360^\circ = 360 \times \frac{\pi}{180} = 2\pi \text{ rad} \end{cases}$$

همچنین برای تبدیل رادیان به درجه، اگر عدد داده شده شامل π بود، کافی است فقط به جای π عدد 180°

را قرار دهیم، ولی اگر عدد داده شده π نداشت آن را در $57/3^\circ$ ضرب می‌کنیم زیرا هر ۱ رادیان، معادل

$57/3^\circ$ است. (در مدرسه، نیاز به اثبات این موضوع نیست.) مثلاً می‌خواهیم $\frac{\pi}{18}$ رادیان را به درجه تبدیل

کنیم، چون در عدد داده شده π مشاهده می‌کنیم فقط کافی است به جای آن 180° قرار دهیم:

$$\frac{\pi}{18} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{18} = 10^\circ$$

حال می‌خواهیم ۳ رادیان را به درجه تبدیل کنیم چون این عدد، π ندارد باید آن را در عدد $57/3^\circ$ ضرب

کنیم؛ یعنی:

$$3 \text{ rad} = 3 \times 57/3^\circ = 171/9^\circ$$

مثال: زاویه -24° را به رادیان تبدیل کنید و زوایای $-\frac{\pi}{15}$ و $1/5$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

حل:

$$-24^\circ = -24 \times \frac{\pi}{180} = \frac{-2\pi}{15} \text{ rad}$$

$$\frac{-\pi}{15} \text{ rad} = \frac{-180^\circ}{15} = -12^\circ$$

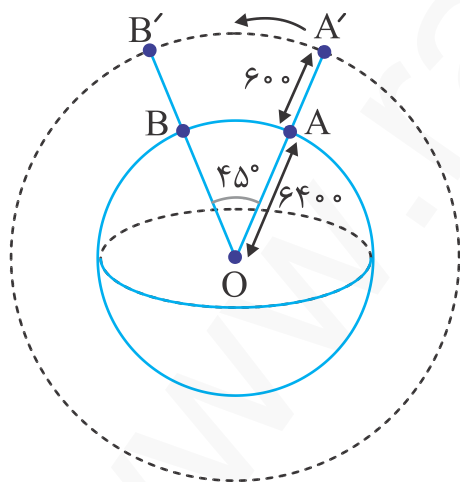
$$1/5 \text{ rad} = 1/5 \times 57/3^\circ = 85/95^\circ$$

یافتن مسافت طی شده توسط ماهواره

در این تیپ سؤالات، مرکز زمین، مرکز دایره‌ای است که ماهواره روی محیط آن در حال حرکت است و زاویه بین دو شعاع دایره (ابتدا و انتهای حرکت) داده می‌شود که آن را α می‌نامیم. دقت کنید اگر این زاویه برحسب

درجه باشد باید آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنیم تا به رادیان تبدیل شود، سپس به کمک فرمول $L = r.\alpha$ مسافت

طی شده را به دست می‌آوریم. توجه کنید که r شعاع زمین نیست، بلکه مجموع شعاع زمین و فاصله ماهواره تا سطح زمین است.



مثال: یک ماهواره مطابق شکل زیر در فاصله ۶۰۰ کیلومتری سطح کره

زمین به دور آن در حال حرکت است. اگر این ماهواره در دو نقطه A

و B روی سطح زمین که با مرکز زمین زاویه 45° می‌سازند رصد شود،

مشخص کنید این ماهواره چه مسافتی را در مدار خود از A' تا B'

طی می‌کند. شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید. (π را ۳

در نظر بگیرید.)

حل: ابتدا زاویه 45° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\alpha = 45^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

شعاع دایره‌ای که ماهواره روی آن در حال حرکت است (OA') برابر است با:

$$r = OA' = OA + AA' = 6400 + 600 = 7000 \text{ km}$$

$$A'B' = L = r\alpha = 7000 \times \frac{\pi}{4} = 7000 \times \frac{3}{4} = 5250 \text{ km}$$

۱ طول برفپاککن عقب خودرویی ۲۵ سانتی‌متر است. اگر برفپاککن کمانی به اندازه ۶۰ درجه طی کند، آنگاه طول کمان طی شده توسط نوک برفپاککن چند سانتی‌متر است؟ ($\pi \approx 3$)

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{L}{25} \Rightarrow L = 25 \times \frac{\pi}{3} = 25$$

پاسخ: ۱

۲ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.
یک رادیان در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول است.

پاسخ: ۱ شعاع دایره

۳ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول $\frac{1}{8}$ cm در دایره‌ای به شعاع ۴ cm برابر رادیان است.

پاسخ: ۱ $\frac{1}{32}$

۴ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

$$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{10} \Rightarrow \alpha = 0.8 \text{ رادیان}$$

پاسخ: ۱

نکته: α و r هم واحد هستند و α برحسب رادیان به دست می‌آید.

۵ زاویه‌ی D برابر با $\frac{\pi}{20}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه چند درجه است؟

$$\frac{\pi}{20} \text{ رادیان} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ$$

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{20} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow D = \frac{180^\circ}{20} \Rightarrow D = 9^\circ$$

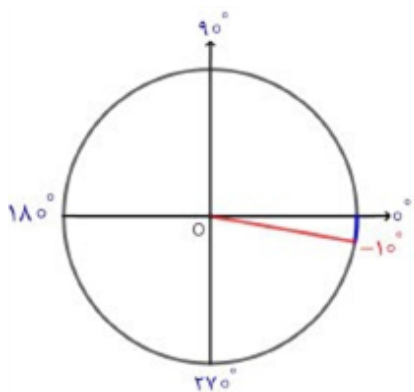
پاسخ: ۱ راه اول:

راه دوم:

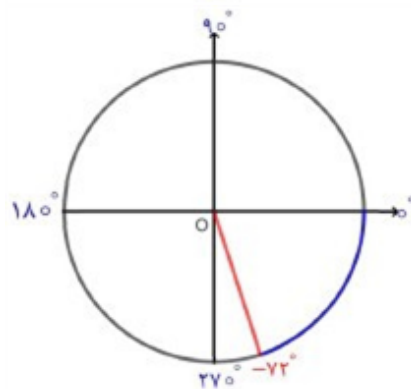
هریک از زاویه‌های $\frac{-\pi}{18}$ رادیان، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به طور

تقریبی روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید.

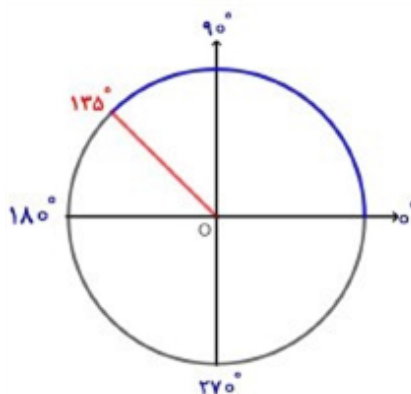
پاسخ: ۱



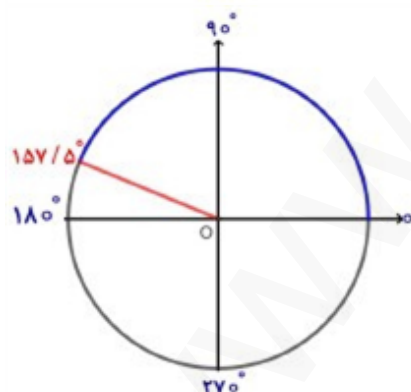
$$\text{رادیان } \frac{-\pi}{18} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{-180^\circ}{18} = -10^\circ$$



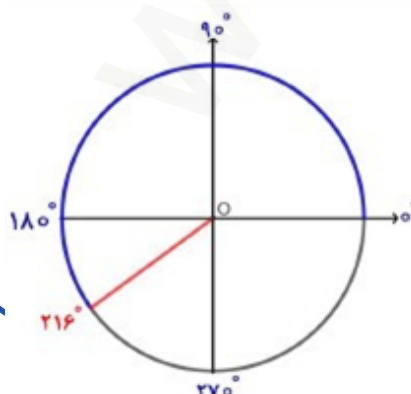
$$\text{رادیان } \frac{-2\pi}{5} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{-360^\circ}{5} = -72^\circ$$



$$\text{رادیان } \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{540^\circ}{4} = 135^\circ$$

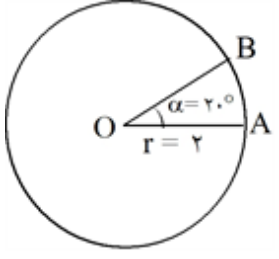


$$\text{رادیان } \frac{7\pi}{8} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{1260^\circ}{8} = 157.5^\circ$$



$$\text{رادیان } \frac{6\pi}{5} \xrightarrow{\pi=180^\circ} \frac{1080^\circ}{5} = 216^\circ$$

در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی α را برحسب رادیان به دست آورید. سپس طول کمان AB را پیدا کنید.

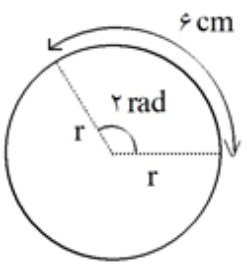


$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{20}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{9}$$

پاسخ: ۱

$$L = r\theta \Rightarrow L = 2 \times \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$$

مساحت دایره مقابل چه قدر است؟

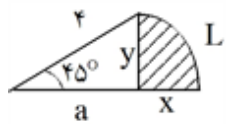
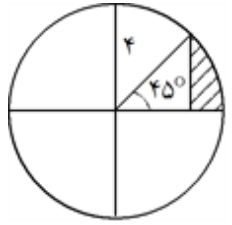


$$l = r\theta \Rightarrow 6 = r \times 2 \Rightarrow r = 3$$

پاسخ: ۱

$$S = \pi r^2 = 9\pi$$

در شکل زیر محیط قسمت هاشورزده را حساب کنید.



پاسخ: ۱

$$L = r\theta \Rightarrow L = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

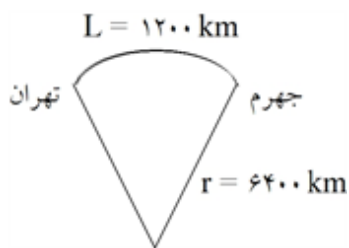
$$\sin 45 = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos 45 = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$a + x = 4 \xrightarrow{a=2\sqrt{2}} x = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$P = x + y + L = 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + \pi = 4 + \pi$$

اگر فاصله جهرم تا تهران ۱۲۰۰ کیلومتر بر روی سطح زمین باشد، زاویه مرکزی این دو شهر در مرکز کره‌ی زمین در صورتی که شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد را حساب کنید. (زاویه برحسب رادیان باشد).

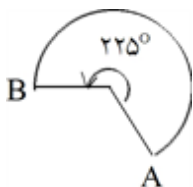


$L = 1200 \text{ km} \quad r = 6400 \text{ km} \quad \theta = ?$

۱ پاسخ:

$$L = r\theta \Rightarrow 1200 = 6400 \cdot \theta \Rightarrow \theta = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

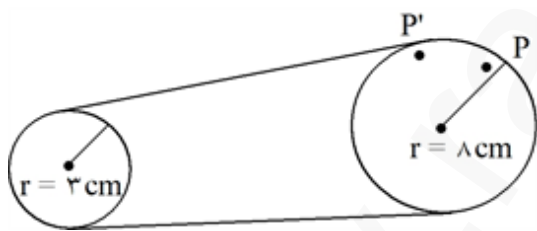
متحرکی از نقطه‌ی A روی دایره به نقطه B می‌رود. اگر شعاع دایره ۱۲ سانتی‌متر باشد، مقدار مسافتی که متحرک پیموده است را به دست آورید.



$$\theta = 225^\circ \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{5\pi}{4} = \frac{L}{12} \Rightarrow L = 15\pi$$

۱ پاسخ:

در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های ۸ cm و ۳ cm را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{3}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟



$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = \frac{\pi}{3} \times 8 = \frac{8\pi}{3} \text{ cm}$$

۱ پاسخ: در قرقره بزرگ‌تر داریم:

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل شده‌اند پس قرقره کوچک‌تر نیز $\frac{8\pi}{3}$ cm حرکت می‌کند بنابراین:

$$\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\frac{8\pi}{3}}{3} = \frac{8\pi}{9} \text{ rad}$$

دکتر متین هوشیار
مدرس شیمی رپیتچ

مهندس علی داودوندی
مدرس ریاضی رپیتچ

مهندس شهاب نصیری
مدرس فیزیک رپیتچ

دکتر الهه بنام
مدرس زیست رپیتچ



رپیتچ

سریعتر یاد بگیری...!

با اساتید رتبه برتر و رتبه پرور
به همراه مشاورین رتبه برتر
تو هم رتبه برتر میشی رفیق

rapiteach.com