

رایگان

شب امتحان

ریاضی دوازدهم

ویدیوهای
شب امتحان

رپیتنج

دانلود جزوات
شب امتحان

مدرسه یار دکنیا

درس نامهٔ توپ برای شب امتحان

مدرس ریاضی ریپتیج

علی داودوندی
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی

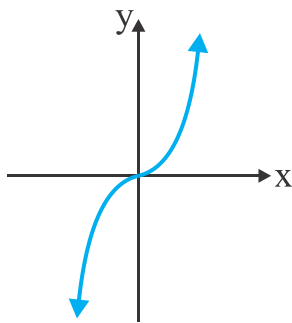
پایه دوازدهم

فصل ۱: تابع

درس ۱: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای

هر تابع که ضابطه‌اش به شکل $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + c$ باشد یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n نام دارد.



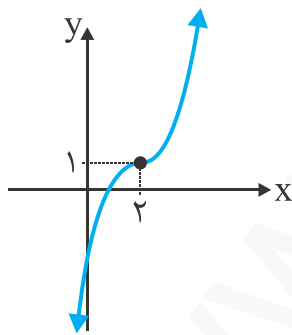
(n عدد صحیح نامنفی و $a \neq 0$ است.) مثلاً تابع $f(x) = 5x^4 - 8x + 1$ یک تابع

چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است. تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ یک تابع درجهٔ ۳

است ($a \neq 0$). در کتاب درسی، تابع $y = x^3$ مورد توجه قرار گرفته که نمودار آن به

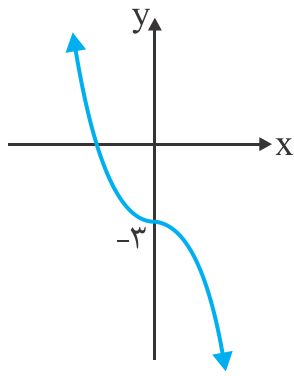
طور تقریبی به شکل روبه‌رو است: $R = R$ برد، $R = R$ دامنه

مثال: نمودار توابع $y_1 = (x-2)^3 + 1$ و $y_2 = -x^3 - 3$ را به کمک نمودار $y = x^3$ رسم کنید.



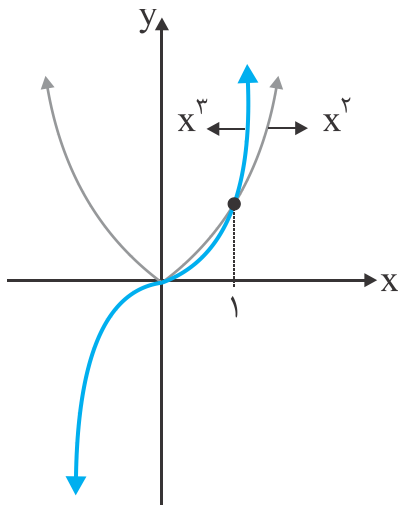
پاسخ: برای رسم نمودار y_1 باید نمودار x^3 را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به

بالا انتقال دهیم که به نمودار روبه‌رو می‌رسیم:



برای رسم نمودار y^2 ابتدا نمودار x^3 را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم سپس آن را ۳ واحد به پایین انتقال می دهیم:

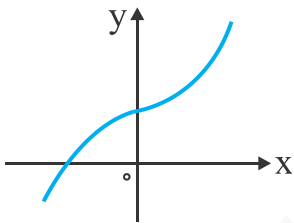
مقایسه نمودار $y = x^2$ و $y = x^3$



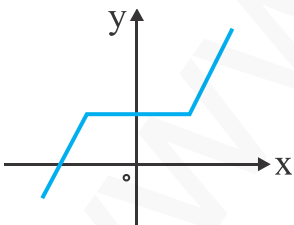
می دانید که اگر x هر عددی بین صفر و یک باشد، حاصل x^2 بزرگ تر از x^3 است پس در بازه (0,1) نمودار x^2 بالاتر از x^3 است ولی در بقیه x های مثبت، نمودار x^3 بالاتر از x^2 است.

در x های منفی هم که واضح است مقدار x^2 مثبت و مقدار x^3 منفی است پس نمودار x^2 بالاتر است.

توابع یکنوا (صعودی یا نزولی)

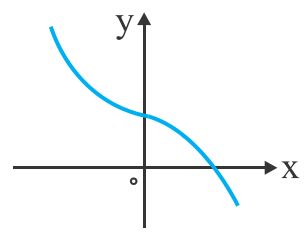


در تابع f اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y هم مرتباً افزایش یابند، می گوییم f اکیداً صعودی است مانند تابع روبه رو:

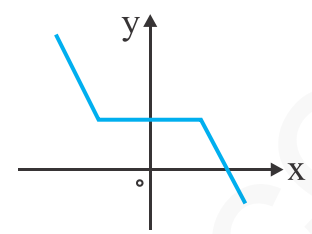


حالا اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y زیاد شوند ولی بعضی نقاط نمودار، هم عرض باشند، می گوییم تابع f صعودی است مانند تابع روبه رو:

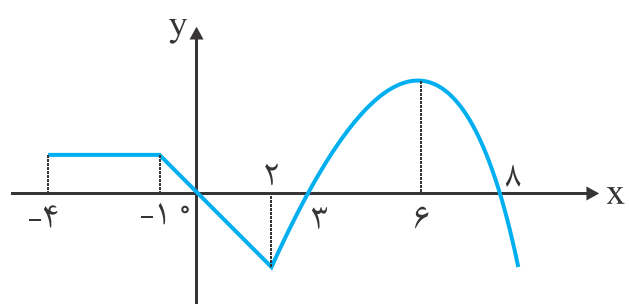
یکنوایی در شکل (۱) اکیداً نزولی یعنی با افزایش مقادیر X مقادیر y کم شوند. یکنوایی در شکل (۲) نزولی یعنی با افزایش مقادیر X مقادیر y کم شوند ولی بعضی نقاط نمودار، هم‌عرض باشند.



شکل (۱)



شکل (۲)



نکته: تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت $y = k$ می‌باشد. ($k \in \mathbb{R}$) ضمناً ممکن است تابعی در کل دامنه خود، نه صعودی باشد نه نزولی ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد؛

مانند شکل روبه‌رو: این تابع در بازه $[-4, -1]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی)، در بازه‌های $[2, 6]$ و $[6, \infty)$ اکیداً نزولی و در بازه $[2, 6]$ اکیداً صعودی است.

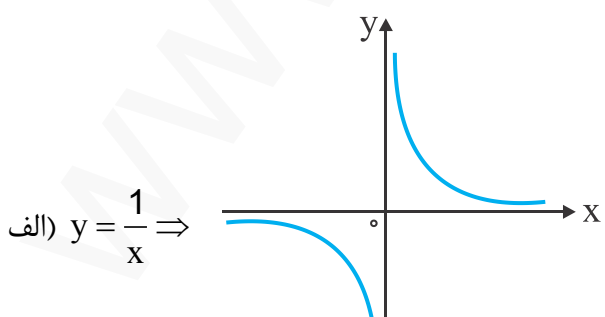
مثال: توابع زیر را رسم کرده و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

الف) $y = \frac{1}{x}$

ب) $y = -\frac{1}{x}$

پ) $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$

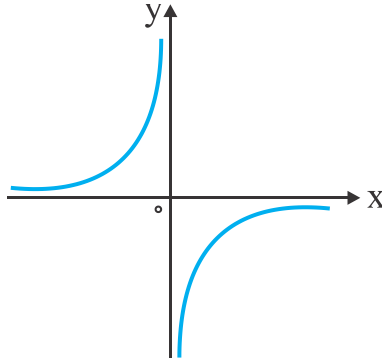
پاسخ:



الف) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow$

تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است ولی در کل \mathbb{R} ، نه صعودی و نه نزولی است.

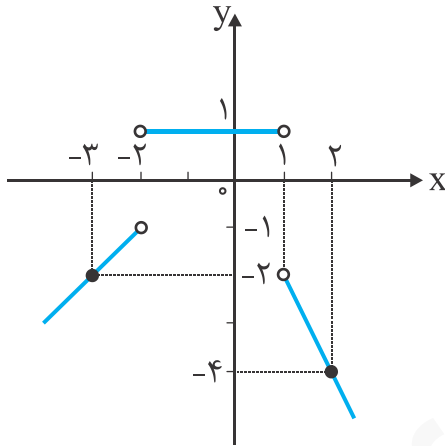
ب) $y = -\frac{1}{x} \Rightarrow$



تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در کل \mathbb{R} ، نه صعودی و نه نزولی است.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l|ll} x & -2 & -3 \\ y & -1 & -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|ll} x & 1 & 2 \\ y & -2 & -4 \end{array}$$



پس تابع f در بازه $(-\infty, -2)$ اکیداً صعودی، در بازه $(-2, 1)$ ثابت (هم صعودی، هم نزولی) و در بازه $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

درس ۲: ترکیب توابع

تعریف ترکیب توابع و به دست آوردن آن

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، ترکیب توابع f و g را با نمادهای $f \circ g$ و $g \circ f$ نمایش

می‌دهیم و خواهیم نوشت:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad , \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال: اگر $f = \{(3,4), (7,8), (5,2)\}$ و $g = \{(1,3), (-2,7), (5,9)\}$ باشد، تابع $f \circ g$ را تشکیل دهید.

(خرداد ۸۹)

پاسخ:

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} 4 \\ -2 \xrightarrow{g} 7 \xrightarrow{f} 8 \Rightarrow f \circ g = \{(1,4), (-2,8)\} \\ 5 \xrightarrow{g} 9 \xrightarrow{f} * \end{cases}$$

دقت کنید ۹ در دامنه

ضمناً با توجه به جواب به دست آمده برای $f \circ g$ می توان گفت:

$$(f \circ g)(1) = 4, \quad (f \circ g)(-2) = 8$$

مثال: توابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ مفروض اند.

الف) دامنه توابع f و g و $g \circ f$ را تعیین کنید.

ب) ضابطه $g \circ f$ را بیابید.

ج) $(\frac{g \circ f}{f-g})(0)$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

الف) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ تعیین دامنه $\rightarrow 4-x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ تعیین دامنه $\rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_g = R - \{1\}$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in [-2, 2] \mid \underbrace{\sqrt{4-x^2} \neq 1}_{\text{به توان ۲} \rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}}\} = [-2, 2] - \{\pm\sqrt{3}\}$$

ب) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{4-x^2} + 2}{\sqrt{4-x^2} - 1}$

$$\text{ثالثاً : } \left(\frac{g \circ f}{f - g}\right)(\cdot) = \frac{(g \circ f)(\cdot)}{f(\cdot) - g(\cdot)} = \frac{g(f(\cdot))}{2 - (-2)} = \frac{4}{4} = 1$$

به دست آوردن $g(x)$ با داشتن $f(x)$ و $(f \circ g)(x)$

ابتدا کل تابع g را در تابع f به جای x قرار می دهیم تا $f \circ g$ به دست آید. سپس جواب آن را با $f \circ g$ که در فرض به ما داده شده مساوی قرار می دهیم تا g به دست آید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{1+x}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x}$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید. (خرداد ۸۷)

پاسخ:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{1+g(x)} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{g(x)}{1+g(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow xg(x) = 1 + g(x) \Rightarrow \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{فانكتوراز } g(x)}$$

$$\Rightarrow g(x)(x-1) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x-1}$$

به دست آوردن $f(x)$ با داشتن $g(x)$ و $(f \circ g)(x)$

در این صورت فرض می کنیم که $g(x) = t$ ، سپس از این رابطه x را بر حسب t پیدا کرده و در رابطه $f \circ g$ که به ما داده شده قرار می دهیم. در نهایت t را به x تبدیل می کنیم.

مثال: اگر $g(x) = 2x - 6$ و $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 7x$ ، آن گاه تابع $f(x)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow f(2x - 6) = 3x^2 - 7x$$

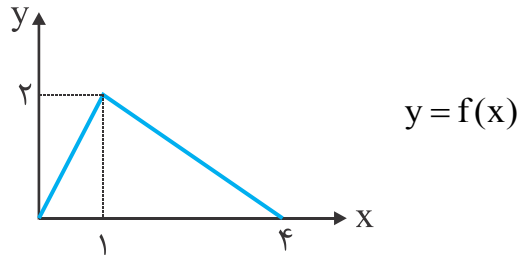
$$2x - 6 = t \Rightarrow 2x = t + 6 \Rightarrow x = \frac{t+6}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{در تابع بالا}} f(t) = 3\left(\frac{t+6}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{t+6}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل } t \text{ به } x} f(x) = 3\left(\frac{x+6}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{x+6}{2}\right)$$

انتقال و تبدیل نمودارها

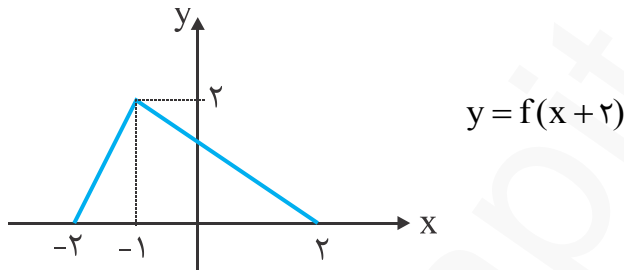
نمودار تابع f را به صورت مقابل فرض کنید:



(۱) برای رسم نمودار $y = f(x \pm k)$ ، ریشه داخلی پرانتز را به دست می آوریم و با توجه به علامت آن نمودار

$f(x)$ را به چپ یا راست حرکت می دهیم؛ مثلاً برای رسم $y = f(x+2)$ خواهیم داشت:

نمودار $f(x)$ را ۲ واحد به چپ حرکت می دهیم. $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow$

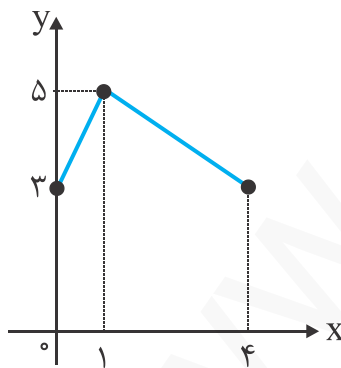


(۲) برای رسم نمودار $y = f(x) \pm k$ نمودار f را با توجه به علامت $\pm k$ به بالا یا

پایین منتقل می کنیم، ضمناً جهت حرکت موافق علامت این عدد می باشد یعنی

اگر این عدد مثبت باشد به بالا و اگر منفی بود به پایین حرکت می کنیم.

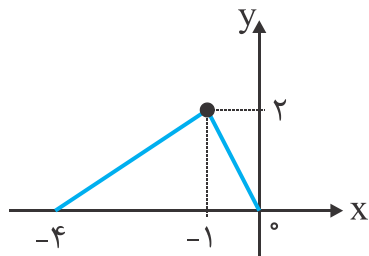
مثلاً برای رسم $y = f(x) + 3$ با توجه به نمودار اولیه f کافی است نمودار f را



$$y = f(x) + 3$$

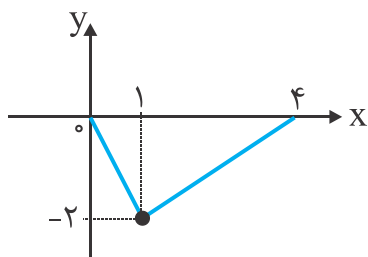
۳ واحد به بالا حرکت دهیم:

۳) برای رسم $y = f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور y ها قرینه کنیم. (انعکاس دهیم):



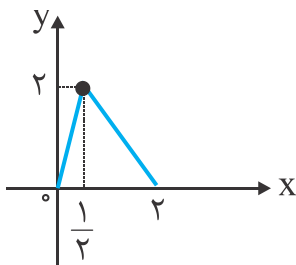
$$y = f(-x)$$

۴) برای رسم $y = -f(x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور x ها قرینه کنیم. (انعکاس دهیم):

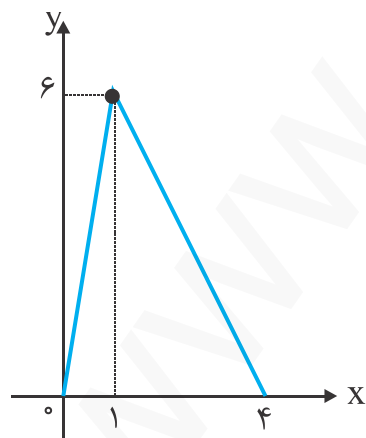


$$y = -f(x)$$

۵) برای رسم $y = f(kx)$ کافی است در نمودار f طول نقاط را بر k تقسیم کنیم. پس فقط دامنه تابع تغییر می کند و برد بدون تغییر خواهد بود. مثلاً برای رسم $y = f(2x)$ طول نقاط نمودار f را بر ۲ تقسیم می کنیم (نمودار فشرده تر می شود). به طور کلی اگر $|k| > 1$ باشد، نمودار به صورت افقی فشرده تر و اگر $|k| < 1$ باشد، نمودار به صورت افقی کشیده تر می شود.



$$y = f(2x)$$



۶) برای رسم $y = kf(x)$ کافی است در نمودار f عرض نقاط را در عدد k ضرب کنیم. پس فقط برد تابع تغییر می کند. ضمناً اگر $|k| > 1$ باشد، نمودار به صورت عمودی کشیده تر و اگر $|k| < 1$ باشد، نمودار به صورت عمودی فشرده تر می شود. مثلاً نمودار $y = 3f(x)$ را رسم می کنیم:

$$y = 3f(x)$$

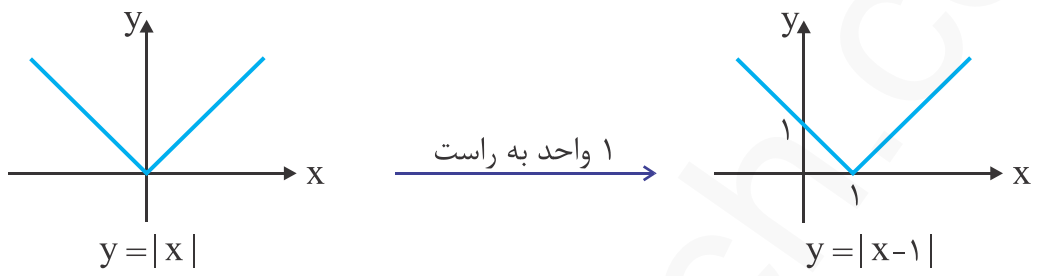
مثال: به کمک قوانین انتقال و تبدیل، نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = -3|x - 1| + 2$

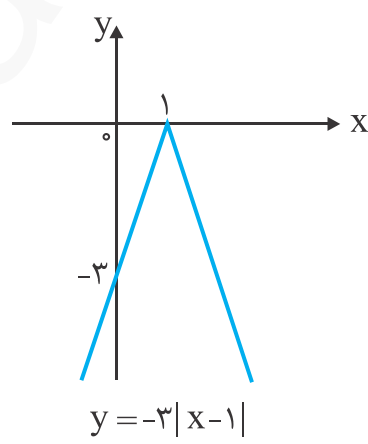
ب) $y = 2 \cos \frac{x}{2}$

پاسخ:

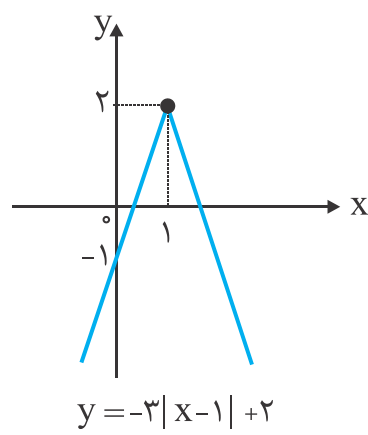
(الف)



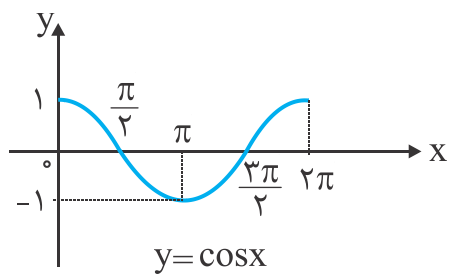
عرض نقاط ۳ برابر و سپس نمودار نسبت به محور Xها قرینه می‌شود.



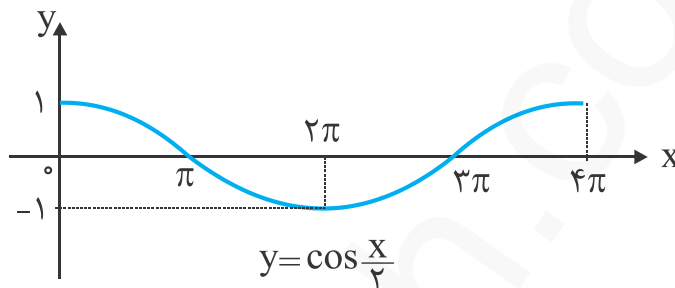
۲ واحد به سمت بالا



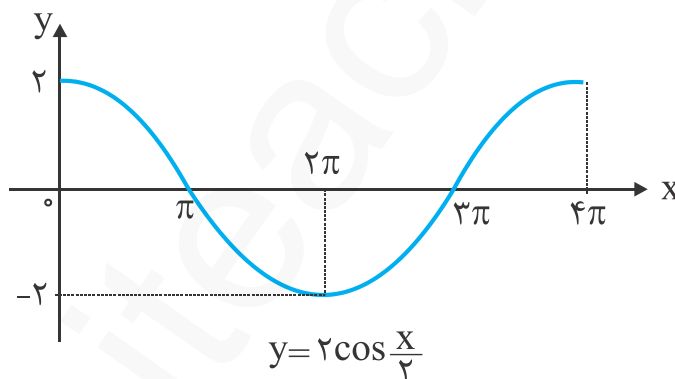
(ب)



طول نقاط ۲ برابر می شود.



عرض نقاط ۲ برابر می شود.



نکته طلایی:

$$af(bx + c) + d$$

$$x \rightarrow -c \rightarrow \div b$$

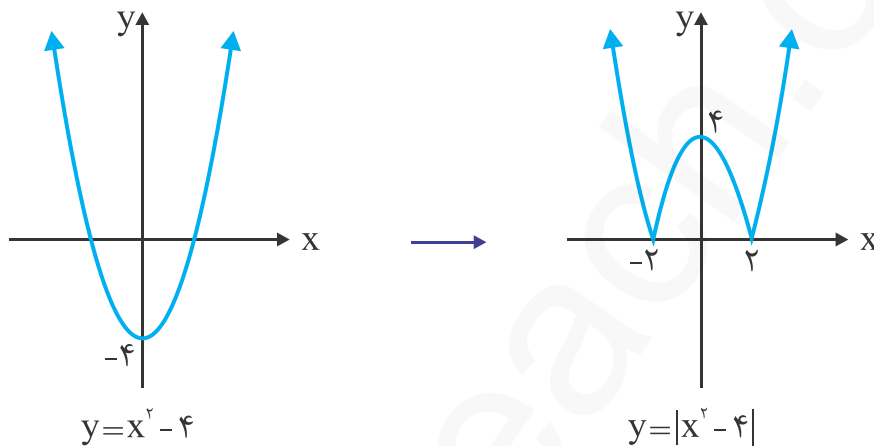
$$y \rightarrow \times a \rightarrow +d$$

رسم نمودار |f|

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور x قرار دارند نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $y = |x^2 - 4|$ را رسم کنید.

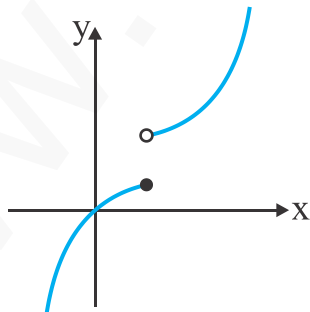
پاسخ: ابتدا نمودار $y = x^2 - 4$ را رسم کرده سپس قسمت پایین محور x را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.



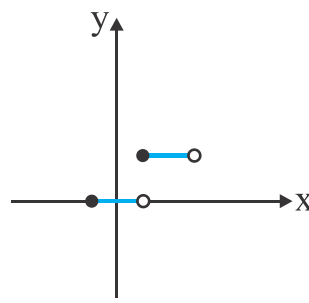
درس ۳: تابع وارون

توابع یک‌به‌یک

هرگاه تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شود، این تابع وقتی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتبی متمایزی، عضو دوم مساوی نداشته باشند. از نظر هندسی، نمودار یک تابع وقتی یک‌به‌یک است که هر خط افقی دلخواه، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند. مثلاً تابع (۱) یک‌به‌یک نیست ولی تابع (۲) یک‌به‌یک است.



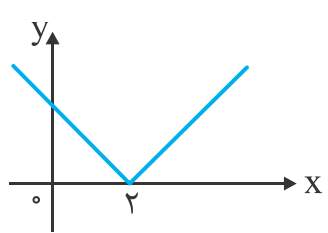
شکل (۲)



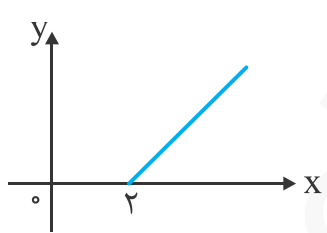
شکل (۱)

محدود کردن دامنه برای یک‌به‌یک شدن تابع

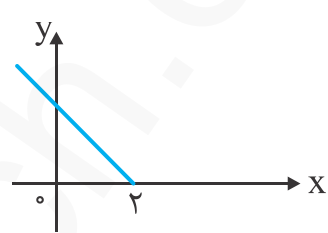
گاهی اوقات تابعی مانند f در دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنه‌اش را محدود کنیم، یک‌به‌یک می‌شود. به عنوان مثال تابع $f(x) = |x - 2|$ در دامنه‌اش یعنی R یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنه آن را به $[2, +\infty)$ یا $(-\infty, 2]$ محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک خواهد شد. (البته در هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه هم، f یک‌به‌یک است.) این را هم بدانید که در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ اگر دامنه را به صورت $(-\infty, \frac{-b}{2a}]$ یا $[\frac{-b}{2a}, +\infty)$ محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک خواهد شد.



$f(x) = |x - 2|$
 $D_f = R$
 (یک‌به‌یک نیست.)



$f(x) = |x - 2|$
 $D_f = [2, +\infty)$
 (یک‌به‌یک است.)



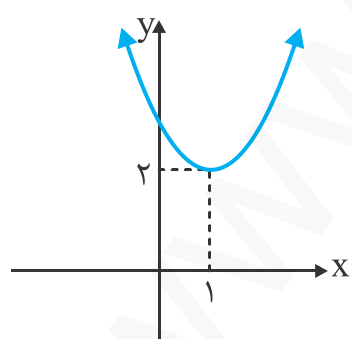
$f(x) = |x - 2|$
 $D_f = (-\infty, 2]$
 (یک‌به‌یک است.)

مثال: یک‌به‌یک بودن یا نبودن تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را بررسی کنید. اگر f یک‌به‌یک نبود. دامنه آن را طوری محدود کنید که یک‌به‌یک شود.

پاسخ: بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم و از روی آن، وضعیت یک‌به‌یکی تابع را بررسی کنیم:

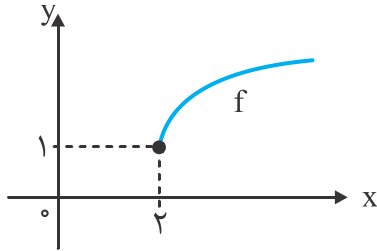
$y = x^2 - 2x + 3$

$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2(1)} = 1 \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم.}]{\text{در تابع}} y = 1^2 - 2(1) + 3 = 2 \Rightarrow S \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$



پس تابع f در R یک‌به‌یک نیست ولی در بازه‌های $(-\infty, 1]$ یا $[1, +\infty)$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه، یک‌به‌یک خواهد بود.

تابع وارون (معکوس)



اگر در تابع f جای x و y را با هم عوض کنیم وارون f به دست می‌آید.

مثلاً اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$ باشد، آن گاه $f^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5)\}$

می‌باشد.

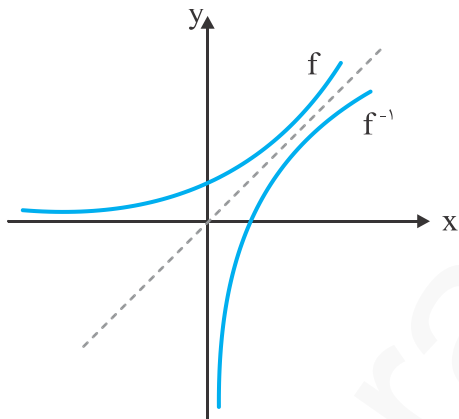
هم‌چنین اگر $g = \{(2, 7), (1, 9), (3, 7)\}$ باشد، آن گاه $g^{-1} = \{(7, 2), (9, 1), (7, 3)\}$ خواهد بود. ولی اگر دقت

کنید واضح است که f^{-1} خودش یک تابع است ولی g^{-1} تابع نیست (دو زوج مرتب مختلف، عضوهای اولشان

مساوی است). علت این است که f یک‌به‌یک بود ولی g یک‌به‌یک نبود. در اینجا اصطلاحاً می‌گوییم f

وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) است. یعنی f^{-1} خودش، یک تابع است. حال با توجه به شکل داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} D_f = [2, +\infty) \Rightarrow R_{f^{-1}} = [2, +\infty) \\ R_f = [1, +\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}} = [1, +\infty) \end{cases}$$



نتایج مهم این مبحث:

(۱) تابع f وقتی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد.

(۲) دامنه f با برد f^{-1} و برد f با دامنه f^{-1} برابر است.

(۳) نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و

سوم) قرینه هستند.

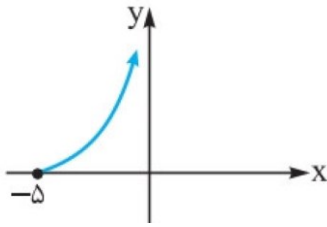
$$A(2, 3) \in f \Rightarrow A'(3, 2) \in f^{-1}$$

یافتن ضابطه f^{-1}

برای این کار ابتدا x را بر حسب y به دست می‌آوریم و سپس نام x را به y یا f^{-1} و نام y را به x تغییر

می‌دهیم. البته حواستان باشد اول باید بررسی کنید که آیا f یک‌به‌یک است یا خیر.

مثال: وارون پذیری تابع $f(x) = (x + 5)^2$ را با شرط $x \geq -5$ بررسی کرده سپس ضابطه تابع وارون را در صورت وجود به دست آورید.



پاسخ: با رسم نمودار تابع، متوجه می شویم که تابع f با دامنه $x \geq -5$ یک به یک است:

$$\text{یافتن تابع وارون} \Rightarrow y = (x + 5)^2 \xrightarrow{x \geq -5} x + 5 = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{y} - 5 \xrightarrow{\text{اسمها را عوض می کنیم}} y = \sqrt{x} - 5 \text{ تابع وارون}$$

نکته مهم: ترکیب هر تابع با تابع وارون خود برابر x می شود:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \quad x \in D_f$$

پس در حالت کلی:

$$(f \circ f^{-1})(x) \neq (f^{-1} \circ f)(x)$$

مثال: تحقیق کنید توابع $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ و $g(x) = \frac{1}{x-2}$ وارون یکدیگرند.

الف) برای کدام مقادیر x داریم: $f(g(x)) = x$

ب) برای کدام مقادیر x داریم: $g(f(x)) = x$

پاسخ: اگر حاصل $f \circ g$ و $g \circ f$ هر دو برابر x شوند به این معنا است که f و g وارون یکدیگرند.

$$\left\{ \begin{array}{l} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-2}} + 2 = x - 2 + 2 = x \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x} + 2\right) = \frac{1}{\frac{1}{x} + 2 - 2} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \end{array} \right.$$

f و g وارون یکدیگرند. \Rightarrow

$$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad \text{الف)}$$

$$(g \circ f)(x) = x \Rightarrow x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{ب)}$$

مثال: اگر $f(x) = 4x - 3$ و $g(x) = x + 2$ باشند، با محاسبه نشان دهید کہ:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

پاسخ: اگر $g \circ f$ را y بنامیم، خواهیم داشت:

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x - 3) = 4x - 3 + 2 = 4x - 1$$

$$\Rightarrow y = 4x - 1 \Rightarrow 4x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y + 1}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{اسمها را عوض می‌کنیم.}} \begin{matrix} (g \circ f)^{-1} \\ \uparrow \\ y \end{matrix} = \frac{x + 1}{4}$$

$$\begin{cases} y = f(x) = 4x - 3 \Rightarrow 4x = y + 3 \Rightarrow x = \frac{y + 3}{4} \Rightarrow f^{-1} = \frac{x + 3}{4} \\ y = g(x) = x + 2 \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow g^{-1} = x - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ g^{-1} = \frac{(x - 2) + 3}{4} = \frac{x + 1}{4} = (g \circ f)^{-1}$$

۱) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست.

پاسخ: ۱) نادرست

۲) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابع $y = \sqrt[3]{3x^3} - \pi x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای است.

پاسخ: ۱) درست

۳) جاهای خالی را پر کنید.

الف) تابع $y = 5 - 3|x - 1|$ در بازه حداکثری اکیداً نزولی است.
ب) تابع $y = x + |x - 2|$ در بازه حداکثری هم صعودی و هم نزولی است.

پاسخ: ۱) الف) $(1, +\infty)$

ب) $(-\infty, 2]$

۴) اگر تابع نمایی $y = (3k - 1)^x$ اکیداً نزولی باشد، حدود k را حساب کنید.

پاسخ: ۱) برای آنکه تابع نمایی $y = a^x$ یک تابع اکیداً نزولی باشد، باید $0 < a < 1$ باشد.

$$0 < 3k - 1 < 1 \xrightarrow{+1} 1 < 3k < 2 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$$

۵) اگر تابع نمایی $y = (2m - 1)^x$ اکیداً صعودی باشد، حدود m را حساب کنید.

پاسخ: ۱) برای آنکه تابع نمایی $y = a^x$ یک تابع اکیداً صعودی باشد، باید $a > 1$ باشد.

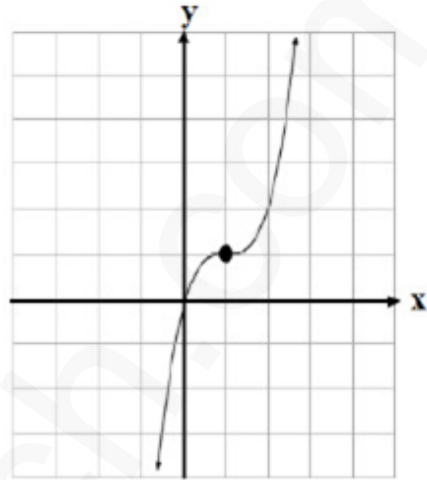
$$2m - 1 > 1 \Rightarrow 2m > 2 \Rightarrow m > 1$$

نمودار تابع $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^3$ رسم کنید، سپس اکیداً یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود، بررسی کنید.

پاسخ: 1

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x - 1)^3 + 1$$

اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)



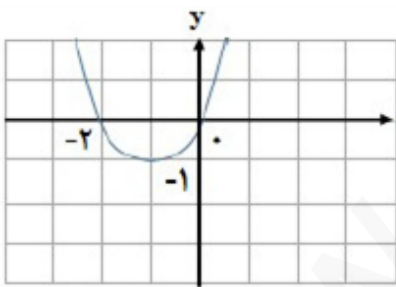
2

جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
- اگر تابعی در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله است.

پاسخ: 1 ثابت

8

ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.



اکیدا صعودی $[-1, +\infty)$
اکیدا نزولی $(-\infty, -1]$

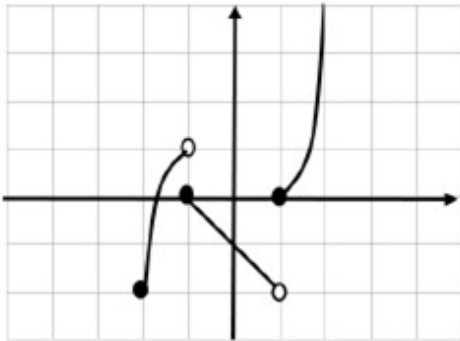
پاسخ: 1

9

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید.
- نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ ، از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالتر - پایین‌تر)

پاسخ: 1 پایین‌تر

۱۰ با رسم نمودار $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & -2 \leq x < -1 \\ -x - 1 & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.



صعودی $[-2, -1)$ ، صعودی $[1, +\infty)$ ،
نزولی $[-1, 1)$

پاسخ: ۱

۱۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.
تابع $f(x)$ در بازه شامل a, b صعودی است. اگر $f(a) \geq f(b)$ آن‌گاه $a \leq b$

پاسخ: ۱ نادرست

۱۲ اگر $f(g(x)) = \frac{x}{2} - 1$ و $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ ، آن‌گاه ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{2} - 1 \Rightarrow \frac{g(x)}{2} - 1 = \frac{x}{2} - 1$$

$$g(x) = x$$

پاسخ: ۱

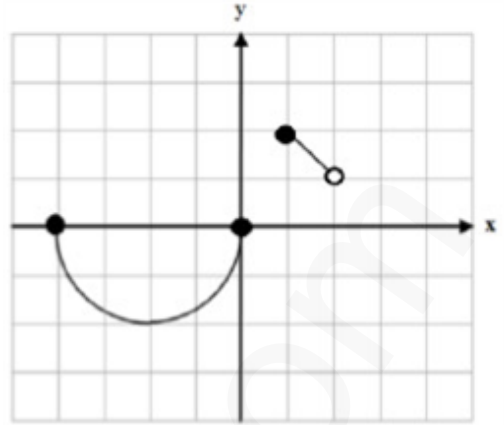
۱۳ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم، ضابطه تابع جدید را بنویسید.

$$y = 2\sqrt{x - 3}$$

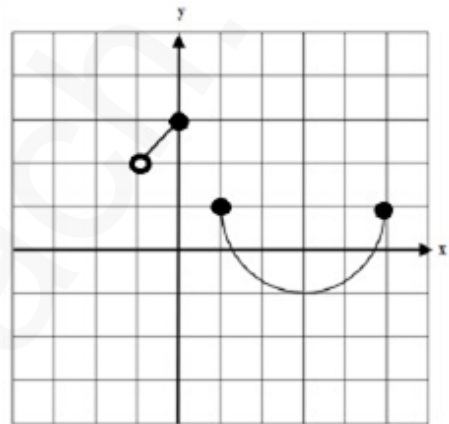
پاسخ: ۱

نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.

۱۴



نمودار تابع $y = f(1 - x) + 1$ را رسم کنید.



۱ پاسخ:

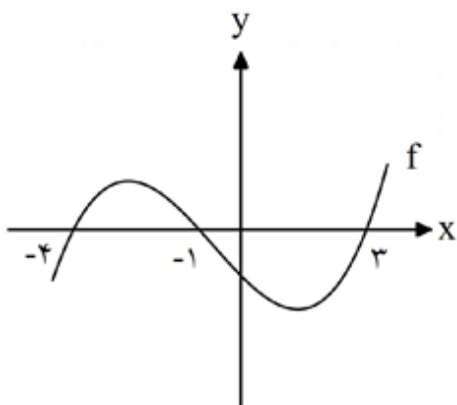
جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

۱۵

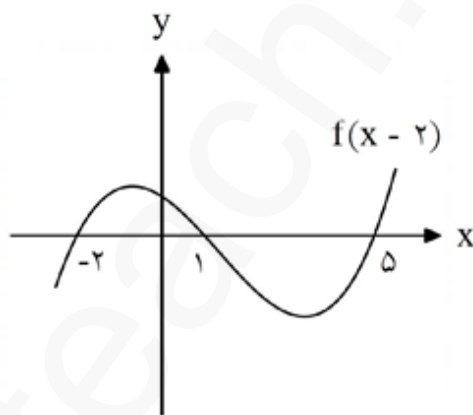
اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x - 2}$ برابر است.

۱ پاسخ: $[2, 4]$

نمودار زیر تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(x) \times f(x-2)}$ را حساب کنید.



پاسخ: ۱ برای رسم تابع $f(x-2)$ باید نمودار $f(x)$ را دو واحد به سمت راست منتقل کنیم.



x	$-\infty$	-4	-2	-1	1	3	5	$+\infty$		
f(x)	-	•	+	+	•	-	-	•	+	
f(x-2)	-	-	•	+	+	•	-	-	•	+
f(x) × f(x-2)	+	•	-	•	+	•	-	•	+	

$$f(x) \times f(x-2) \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, -4] \cup [-2, -1] \cup [1, 3] \cup [5, +\infty)$$

۱۷) توابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \frac{1}{x-5}$ را در نظر بگیرید و دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$D_f : 2 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{5\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \underbrace{\{x \leq 2 \mid \sqrt{2-x} \neq 5\}}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2-x} \neq 5 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} 2-x \neq 25 \Rightarrow -x \neq 23 \Rightarrow \underbrace{x \neq -23}_{(2)}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_{g \circ f} = (-\infty, 2] - \{-23\}$$

۱۸) توابع $f(x) = \sqrt{2-3x}$ و $g(x) = \frac{2}{x+5}$ را در نظر بگیرید و دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$D_f : 2 - 3x \geq 0 \Rightarrow -3x \geq -2 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow D_f = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \underbrace{\left\{x \neq -5 \mid \frac{2}{x+5} \leq \frac{2}{3}\right\}}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x+5} - \frac{2}{3} \leq 0 \Rightarrow \frac{6-2x-10}{3x+15} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x-4}{3x+15} \leq 0 \Rightarrow \underbrace{x < -5 \text{ یا } x \geq -2}_{(2)}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_{f \circ g} = (-\infty, -5) \cup [-2, +\infty)$$

اگر $f(x) = 4x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x - 7}$ باشند:

الف) دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $\frac{(f \circ g)(1)}{(g \circ f)(4)}$ را محاسبه کنید.

پاسخ: ۱ الف)

$$D_f = \mathbb{R}$$

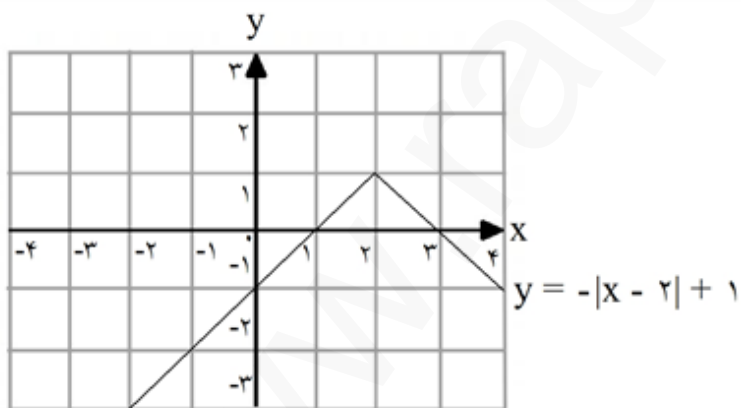
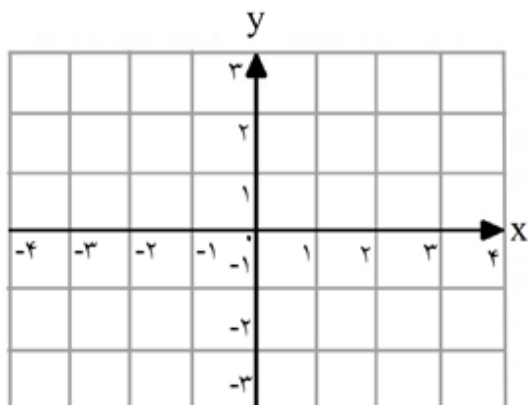
$$D_g : x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - 1 \geq 7\} \Rightarrow 4x \geq 8 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_{g \circ f} = [2, +\infty)$$

ب)

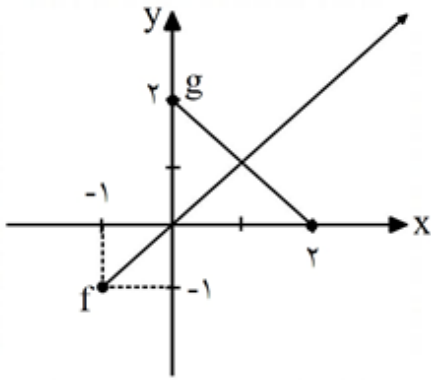
$$\frac{(f \circ g)(1)}{(g \circ f)(4)} = \frac{f(g(1))}{g(f(4))} = \frac{f(1)}{g(17)} = \frac{3}{2}$$

نمودار $y = -|x - 2| + 1$ را به کمک انتقال نمودار $y = |x|$ رسم کنید.



پاسخ: ۱

اگر نمودار دو تابع خطی f و g به صورت زیر باشد، دامنه $g \circ f$ را به کمک تعریف حساب کنید.



$$f(x) = x$$

$$g(x) = -x + 2$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq -1 \mid 0 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$$

پاسخ: ۱

اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 3]$ و برد آن $[0, 2]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right)$ را بیابید.

$$D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} \Rightarrow -1 < \frac{x}{2} \leq 3 \Rightarrow D_{f\left(\frac{x}{2}\right)} = (-2, 6]$$

پاسخ: ۱

برد تغییر نمی‌کند.

اگر $g(x) = \sqrt{x+3}$ و $f(x) = 7 - 4x^2$ باشد:

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.
ب) مقدار $(g \circ f)(1)$ را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-3, +\infty) \mid \sqrt{x+3} \in \mathbb{R}\} = [-3, +\infty)$$

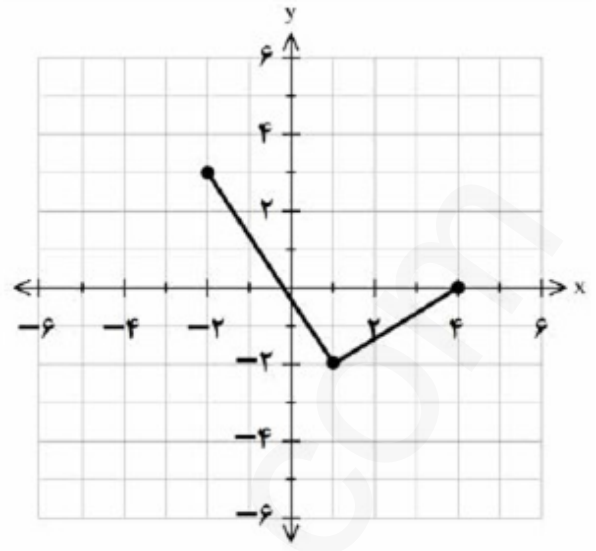
پاسخ: ۱

$$\text{ب) } (g \circ f)(1) = g(4) = \sqrt{7}$$

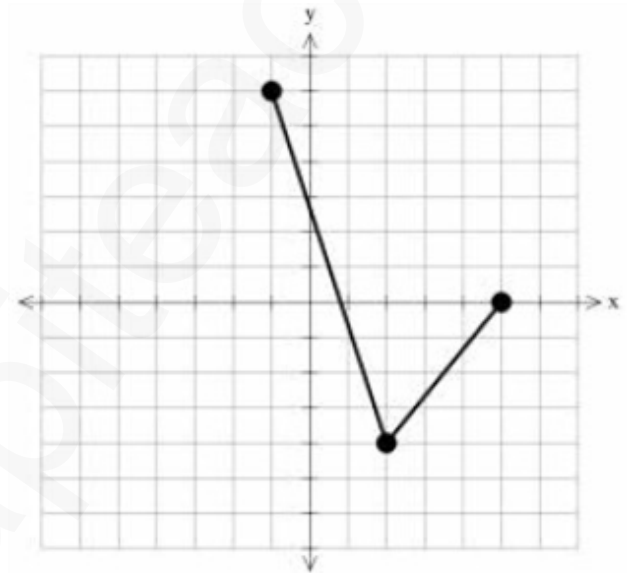
اگر $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 0), (-1, 4), (7, 7)\}$ تابع $g \circ f$ را در صورت وجود بنویسید.

$$g \circ f = \{(0, 4), (3, 7), (5, 0)\}$$

پاسخ: ۱



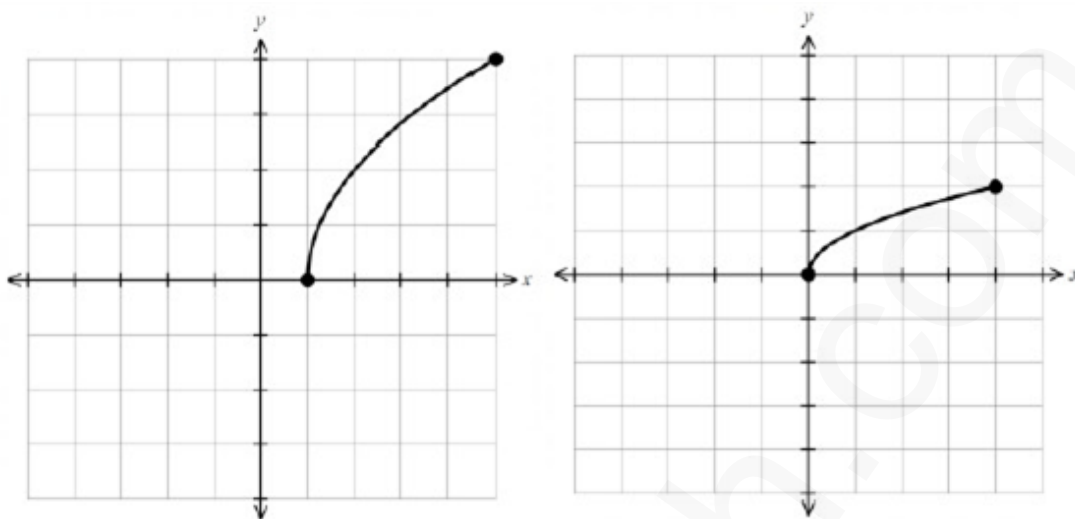
الف) نمودار تابع $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کنید.
 ب) دامنه تابع g را به دست آورید.



پاسخ: ۱ الف)

ب) $[-1, 5]$

الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه $[0, 4]$ رسم کنید.
 ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = 2f(x - 1)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.



پاسخ: ۱

ب

الف

$$R_g = [0, 4], D_g = [1, 5]$$

۲۷) اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟

$$\text{خروجی} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x} + 1} \Rightarrow 2x - 2 \Rightarrow x \text{ ورودی}$$

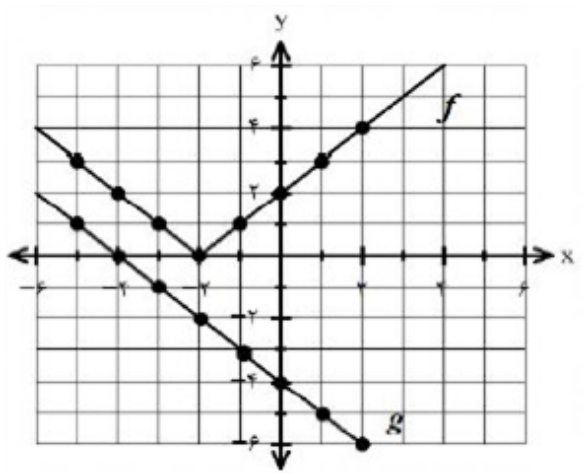
$$x = 3 \Rightarrow 2(3) - 2 = 4 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{(3)} + 1} = \frac{4}{3}$$

پاسخ: ۱

با توجه به نمودار تابع f و g ، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱) $(g \circ f)(-۱)$

۲) $(g^{-1} \circ f^{-1})(۲)$

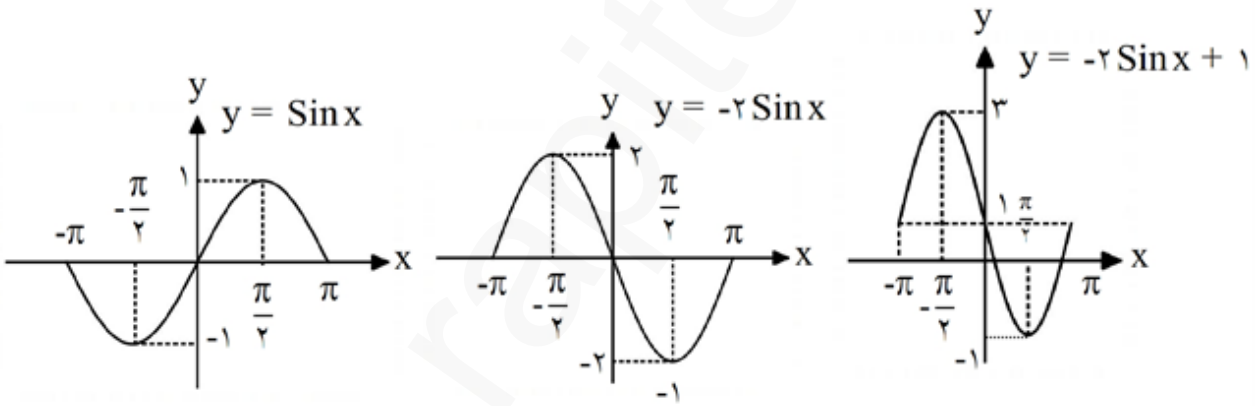


۱) $(g \circ f)(-۱) = g(۱) = -۵$

۲) $(g^{-1} \circ f^{-1})(۲) = g^{-1}(۰) = -۲$

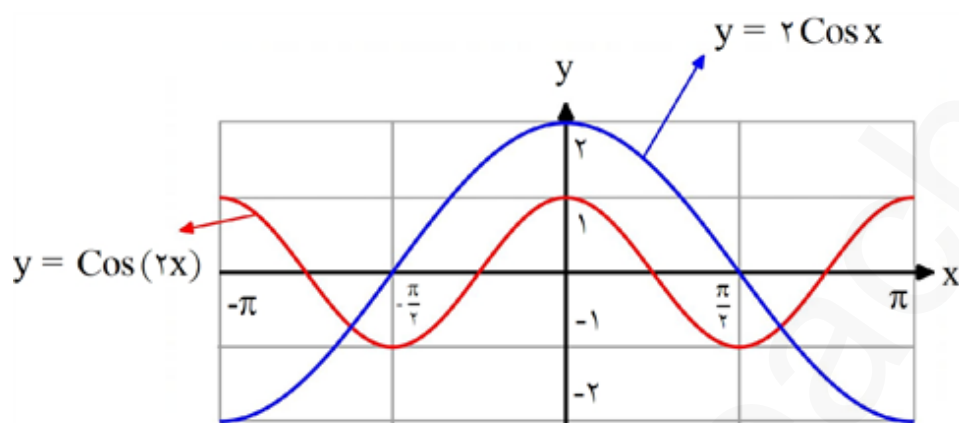
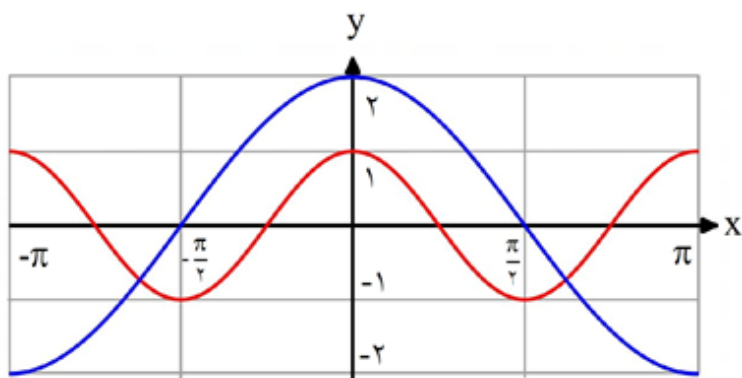
پاسخ: ۱

نمودار تابع $y = ۱ - ۲ \sin x$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.



پاسخ: ۱

در شکل زیر نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y = 2 \cos x$ و $y = \cos(2x)$ در بازه $[-\pi, \pi]$ مشخص کنید.



۱ پاسخ:

۳۱ اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{x+5}$ دامنه fog را حساب کنید.

۱ پاسخ:

$$D_f = R - \{1\}$$

$$D_g = R - \{-5\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \neq -5 \mid \frac{1}{x+5} \neq 1\right\}$$

$$\frac{1}{x+5} \neq 1 \Rightarrow x+5 \neq 1 \Rightarrow x \neq -4$$

$$D_{f \circ g} = R - \{-4, -5\}$$

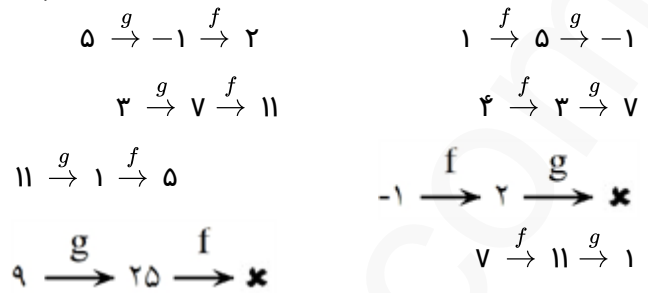
۳۲ اگر $f(x) = 5x - 1$ و $g(x) = 3x + 2$ باشد، معادله $(f \circ g)(x) = 4$ را حل کنید.

۱ پاسخ:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 5(3x + 2) - 1 = 15x + 9 = 4 \Rightarrow 15x = -5 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

اگر $f = \{(1, 5), (4, 3), (-1, 2), (7, 11)\}$ و $g = \{(5, -1), (3, 7), (11, 1), (9, 25)\}$ باشد، توابع $g \circ f$ و $f \circ g$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱ $f \circ g = \{(5, 2), (3, 11), (11, 5)\}$ $g \circ f = \{(1, -1), (4, 7), (7, 1)\}$



۳۴ با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر a و b را حساب کنید.

x	f(x)
5	1
2	a
3	-1

x	g(x)
b	8
4	3
-2	2

الف) $(f \circ g)(-2) = 10$
 ب) $(g \circ f)(5) = 8$

پاسخ: ۱ الف) $(f \circ g)(-2) = 10 \Rightarrow f(g(-2)) = f(2) = 10 \Rightarrow a = 10$
 ب) $(g \circ f)(5) = 8 \Rightarrow g(f(5)) = 8 \Rightarrow g(1) = 8 \Rightarrow b = 1$

۳۵ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x + 1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله‌ی آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه‌ی نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.

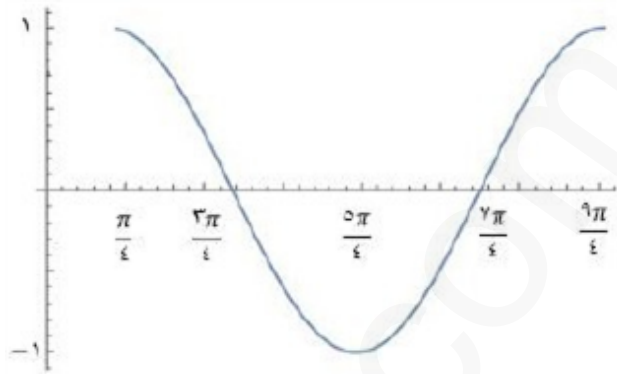
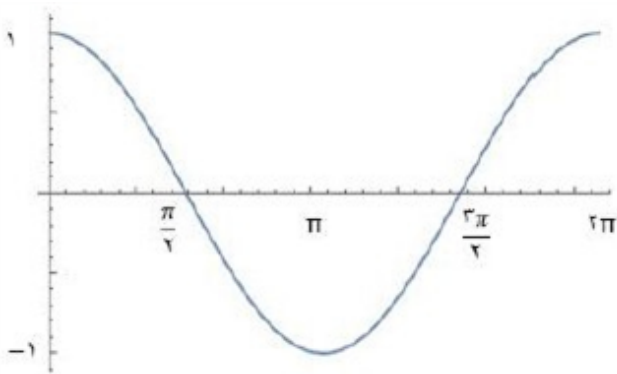
مرحله ۱	مرحله ۲	مرحله ۳
$f(x) - 2 = (x - 1)^2 - 2$	$f(x + 1) - 2 = x^2 - 2$	$-f(x + 1) + 2 = -x^2 + 2$

پاسخ: ۱

۳۶ جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.
 - اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید.

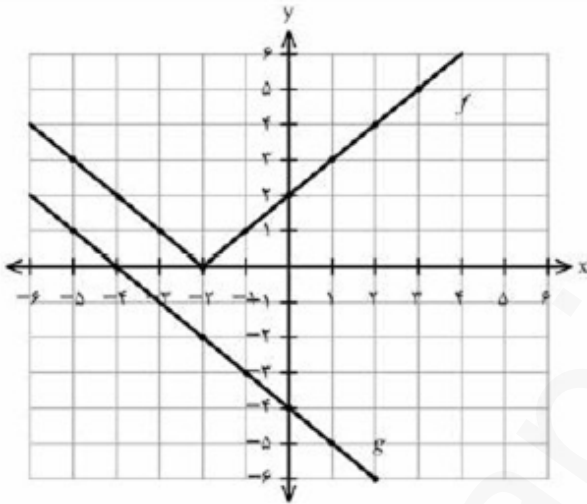
پاسخ: ۱ انقباض افقی

۳۷ نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.



۱ پاسخ:

۳۸ با توجه به نمودارهای تابع f, g به سؤالات زیر پاسخ دهید.
 الف) مقدار $f \circ g(-1)$ را محاسبه کنید.
 ب) اگر $g(3t - 1) = 0$ آن گاه مقدار t را به دست آورید.
 پ) با محدود کردن دامنه f ، بازه‌ای را مشخص کنید که تابع f یک به یک شود.



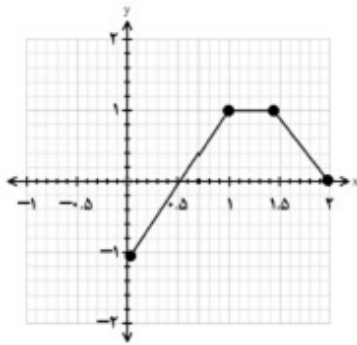
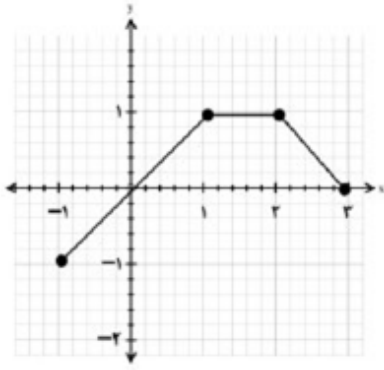
الف) $g(-1) = -3 \Rightarrow f \circ g(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 1$

ب) $3t - 1 = -4 \Rightarrow t = -1$

۱ پاسخ:

پ) بازه $[-2, +\infty)$

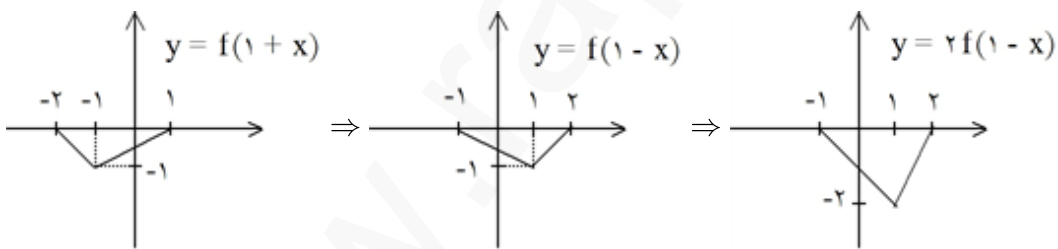
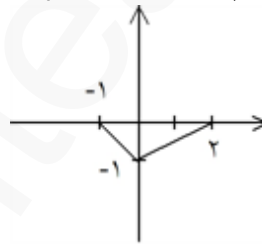
نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x - 1)$ را رسم، دامنه و برد آن را تعیین کنید.



$D_g = [0, 2]$ $R_g = [-1, 1]$

۱ پاسخ:

با استفاده از نمودار f ، نمودار $y = 2f(1 - x)$ را رسم کنید.



۱ پاسخ:

۴۱ اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = \sqrt{10-x}$ دامنه $g \circ f$ را حساب کنید.

$$D_f : x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$D_g : 10 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 10$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 3 \mid \sqrt{x-3} \leq 10\} \quad (1)$$

↓
به توان ۲ می رسانیم

$$x - 3 \leq 100$$

$$(2) \quad x \leq 103$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_{g \circ f} = [3, 103]$$

۱ پاسخ:

۴۲ اگر $f(x-2) = x^2 + 4x$ ، ضابطه $f(2x+1)$ را حساب کنید.

$$f(\underbrace{x-2}_t) = x^2 + 4x$$

$$x - 2 = t \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow f(t) = (t+2)^2 + 4(t+2) \Rightarrow f(t) = t^2 + 4t + 4 + 4t + 8$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 8t + 12 \xrightarrow{t=2x+1} f(2x+1) = (2x+1)^2 + 8(2x+1) + 12$$

$$\Rightarrow f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 1 + 16x + 8 + 12 \Rightarrow f(2x+1) = 4x^2 + 20x + 21$$

۱ پاسخ:

الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه با مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کار تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.
ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

پاسخ: ۱ الف) مقرون به صرفه است

$$f(x) = x - \frac{2}{10}x = \frac{8}{10}x = \frac{4}{5}x \quad (x > 0) \quad g(x) = x - 200000 \quad x > 1500000$$

$$g(f(x)) = f(x) - 200000 = \frac{4}{5}x - 200000$$

$$\frac{80}{100} \times 200000 - 200000 = 160000$$

$$f(g(x)) = f(x - 200000) = \frac{4}{5}(x - 200000) = \frac{4}{5}x - 160000$$

$$\text{ب) } \frac{80}{100}(200000 - 200000) = 0$$

۴۴ اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ برابر $[-2, +\infty)$ باشد، ضابطه و دامنه تابع وارون را به دست آورید.

$$f(x) = (x+2)^2 - 1 \Rightarrow y+1 = (x+2)^2 \xrightarrow{x \geq -2} \sqrt{y+1} = x+2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 2$$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

۴۵ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اگر $f = \{(1, 7), (4, 2), (10, -3), (2, 10)\}$ ، $g(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ و $(f^{-1} \circ g)(a) = 10$ باشد، مقدار a برابر است.

ب) اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = 7x - 2$ ، آن‌گاه $(f^{-1} \circ g^{-1})(82)$ برابر است.

پاسخ: ۱ الف) ۲۴

ب) ۲

جاهای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

الف) اگر $f(x) = x^3 + x$ باشد، حاصل $f^{-1}(30)$ برابر است.
 ب) اگر $f(x) = x + \sqrt{x+1}$ باشد، حاصل $(f \circ f^{-1})(19)$ برابر است.

پاسخ: ۱ الف) ۳
 ب) ۱۹

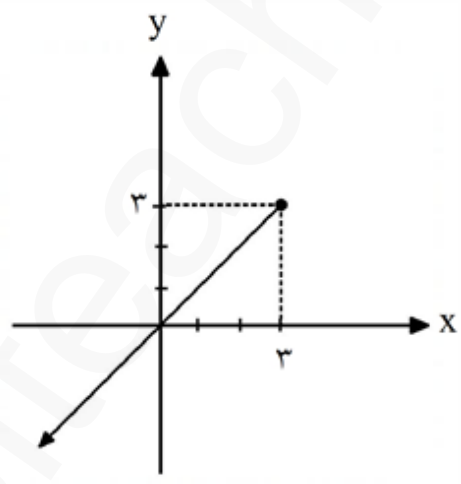
۴۷) اگر $f(x) = 3 - \sqrt{x+2}$ باشد، نمودار $y = (f \circ f^{-1})(x)$ را رسم کنید.

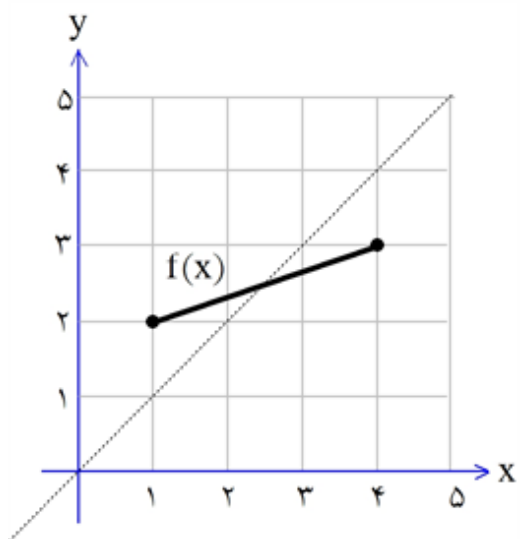
پاسخ: ۱
 $R_f : \sqrt{x+2} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{x+2} \leq 0 \xrightarrow{+3} 3 - \sqrt{x+2} \leq 3 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow R_f = (-\infty, 3]$

در تابع وارون جای دامنه و برد تغییر می‌کند، بنابراین:

$D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 3]$

$y = (f \circ f^{-1})(x) = x$



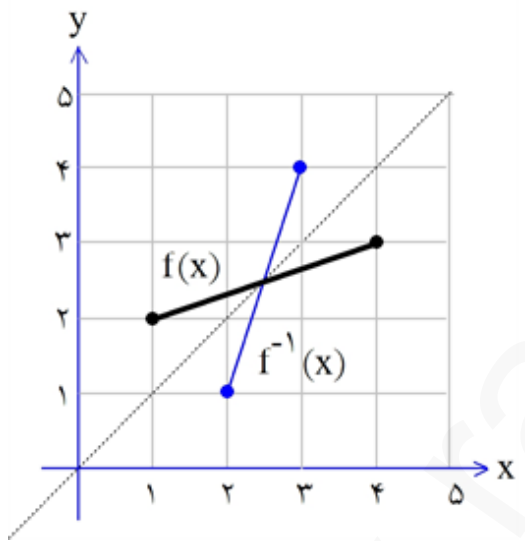


۱ پاسخ: تابع f از نقاط $A(1, 2)$ و $B(4, 3)$ می‌گذرد. بنابراین برای تابع وارون داریم:

$$(1, 2) \in f \Rightarrow (2, 1) \in f^{-1}$$

$$(4, 3) \in f \Rightarrow (3, 4) \in f^{-1}$$

بنابراین نمودار $f^{-1}(x)$ به صورت زیر است.



اگر $f = \{(2, 9), (5, m+1), (2, m^2), (7, 4), (k+7, -2)\}$ یک تابع یک به یک باشد m و k را حساب کنید.

$$m^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \text{ ق ق} \\ m = -3 \text{ ق ق} \end{cases}$$

پاسخ: ۱

$$m = 3 \Rightarrow f = \{(2, 9), (5, 4), (2, 9), (7, 4), (k+7, -2)\}$$

به ازای $m = 3$ یک به یک نیست.

$$m = -3 \Rightarrow f = \{(2, 9), (5, -2), (2, 9), (7, 4), (k+7, -2)\}$$

به ازای $m = -3$ یک به یک است.

$$k+7 = 5 \Rightarrow k = -2$$

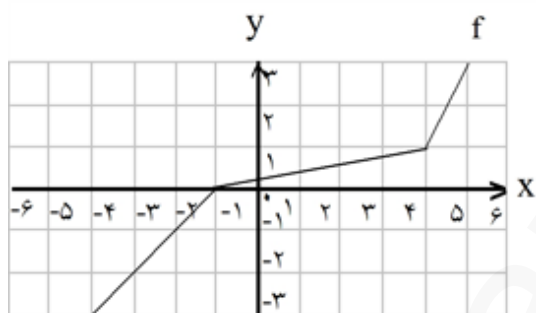
بنابراین $k = -2$ و $m = -3$ تابع یک به یک است.

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- دو تابع $f(x) = -\frac{7}{2}x - 3$ و $g(x) = -\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند.

پاسخ: ۱ نادرست

با توجه به نمودار f که در شکل زیر داده شده است، جدول را کامل کنید.



x	-3	-1	1	3
$f^{-1}(x)$				

پاسخ: ۱ در واقع این x هایی که در جدول نوشته شده است برای نمودار تابع رسم شده همان y است. بنابراین کافی است x

این نقاط را در نمودار مشخص کنیم که همان y است.

x	-3	-1	1	3
$f^{-1}(x)$	-4	-2	4	5

۵۲ اگر $f(x) = \frac{x}{5} - 1$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(24)$ را حساب کنید.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(24) = g^{-1}(f^{-1}(24))$$

پاسخ: ۱

عدد ۲۴ برای تابع f خروجی تابع است.

$$f(x) = \frac{x}{5} - 1 = 24 \Rightarrow \frac{x}{5} = 25 \Rightarrow x = 125$$

عدد ۱۲۵ برای تابع g خروجی تابع است.

$$x^3 = 125 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y^{-1}(125) = 5$$

۵۳ اگر $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ و $g(x) = x^2 + x$ باشد، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(14)$ را حساب کنید.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(14) = g^{-1}(f^{-1}(14))$$

پاسخ: ۱

عدد ۱۴ برای تابع f خروجی تابع است.

$$f(x) = \frac{x}{2} - 1 = 14 \Rightarrow \frac{x}{2} = 15 \Rightarrow x = 30$$

عدد ۳۰ برای تابع g خروجی تابع است.

$$x^2 + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$$

۵۴ ضابطه تابع وارون تابع یک به یک زیر را به دست آورید.

$$f(x) = -3 - \sqrt{1 - 7x}$$

$$y = -3 - \sqrt{1 - 7x} \Rightarrow \sqrt{1 - 7x} = -3 - y \xrightarrow{\text{به توان می‌رسانیم}} 1 - 7x = 9 + 6y + y^2$$

پاسخ: ۱

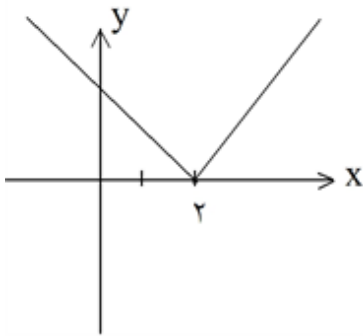
$$\Rightarrow -7x = y^2 + 6y + 8 \xrightarrow{\div(-7)} x = \frac{y^2 + 6y + 8}{-7}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{-7}$$

دامنه تابع $f(x) = |x - 2|$ را چنان محدود کنید که تابع یک به یک باشد.

۵۵

پاسخ: ۱ با توجه به نمودار تابع دامنه محدود شده باید $[2, +\infty)$ یا $(-\infty, 2]$ باشد.



وارون تابع $f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 1}{x - 1}$ ، تابع $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + ax + b}{5x + c}$ است. a و b و c را حساب کنید.

۵۶

$$f(x) = \frac{(5x - 1)(x - 1)}{x - 1} \Rightarrow f(x) = 5x - 1 \Rightarrow D_f = R - \{1\}$$

پاسخ: ۱

$$\xrightarrow{x=1} y = 4 \Rightarrow R_f = R - \{4\} \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f$$

$$y = 5x - 1 \Rightarrow y + 1 = 5x \Rightarrow x = \frac{y + 1}{5} \Rightarrow y = \frac{x + 1}{5}$$

باید در $x - 4$ ضرب و تقسیم کنیم.

$$f^{-1}(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{5}\right)(x-4)}{x-4} = \frac{x^2 - 3x - 4}{5x - 20} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -4 \\ c = -20 \end{cases}$$

وارون تابع $f(x) = \frac{x}{3x - 2}$ را بیابید.

۵۷

$$y = \frac{x}{3x - 2} \Rightarrow 3xy - 2y = x \Rightarrow x(3y - 1) = 2y \Rightarrow x = \frac{2y}{3y - 1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{2x}{3x - 1}$$

پاسخ: ۱

اگر تابع خطی f از نقاط $(2, 1)$ و $(4, 5)$ عبور کند، ضابطه‌ی تابع وارون آن را به دست آورید.

۵۸

پاسخ: ۱ ابتدا ضابطه خطی تابع f را می‌یابیم:

$$\begin{cases} (2, 1) \in f \\ (4, 5) \in f \end{cases} \Rightarrow y - 1 = \frac{5 - 1}{4 - 2}(x - 2) \Rightarrow y = f(x) = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3 \Rightarrow y + 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y + 3}{2} \Rightarrow y = \frac{x + 3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}$$

۵۹ اگر $f(x) = 8 - 2x$ باشد، دامنه $h(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{f^{-1}(x)}}$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱ $f(x) = 8 - 2x \Rightarrow y = 8 - 2x \Rightarrow 2x = 8 - y \xrightarrow{\div 2} x = 4 - \frac{y}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{8-x}{2}$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{8-x}{2}$$

$$h(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{\frac{8-x}{2}}} = \sqrt{\frac{2x+2}{8-x}} \Rightarrow \frac{2x+2}{8-x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 8 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 8$$

$$\Rightarrow D_h = \left[-\frac{1}{2}, 8\right)$$

۶۰ در یک تابع خطی اگر $f(1) = 5$ و $f^{-1}(9) = 3$ باشد، $f^{-1}(13)$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱ تابع خطی است بنابراین ضابطه آن را به صورت $f(x) = ax + b$ می‌نویسیم.

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f(1) = a + b = 5$$

$$f^{-1}(9) = 3 \Rightarrow f(3) = 9 \Rightarrow 3a + b = 9$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -2a - b = -9 \end{cases} \Rightarrow -2a = -4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3$$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f^{-1}(13) = a \Rightarrow f(a) = 13 \Rightarrow 2a + 3 = 13 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

۶۱ اگر $f(x) + f^{-1}(x) = 2x + 10$ باشد، مقدار $\frac{1+f(1)}{2-f^{-1}(.)}$ را حساب کنید.

$$(x, f^{-1}(x)) \in f^{-1} \Rightarrow (f^{-1}(x), x) \in f \Rightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(x) \\ f(x) = x \end{cases} \Rightarrow x + f^{-1}(x) = 2f^{-1}(x) + 10$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -4$$

$$f(x) - 4 = 2x + 10 \Rightarrow f(x) = 2x + 14$$

$$f(1) = 2 + 14 = 16$$

$$f^{-1}(.) = a \Rightarrow f(a) = . \Rightarrow 2a + 14 = . \Rightarrow a = -7$$

$$\frac{1+f(1)}{2-f^{-1}(.)} = \frac{1+16}{2+7} = \frac{17}{9}$$

اگر تابع خطی f نمودار $g(x) = x^2 - 2x + 1$ را در نقاطی به طول ۱ و ۳ قطع کند، ضابطه‌ی وارون f را حساب کنید.

$$x = 1 \Rightarrow g(1) = 0 \Rightarrow A(1, 0) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{3 - 1} = 2$$

$$x = 3 \Rightarrow g(3) = 4 \Rightarrow B(3, 4)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

$$y + 2 = 2x \xrightarrow{\div 2} \frac{y + 2}{2} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x + 2}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{2}$$

پاسخ: ۱

ضابطه و دامنه‌ی وارون $f(x) = \frac{x^2 - 13x + 36}{x - 9}$ را به دست آورید. ۶۳

$$D_f = R - \{9\} \Rightarrow f(x) = \frac{(x - 4)(x - 9)}{(x - 9)} = x - 4$$

پاسخ: ۱

تابع در $(9, 5)$ تعریف نشده است. بنابراین وارون آن در $(5, 9)$ تعریف نشده است.

$$y = x - 4 \Rightarrow y + 4 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = x + 4$$

$$D_{f^{-1}} = R - \{5\}$$

اگر $f(x) = 2x + 1$ ، دامنه‌ی $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f^{-1}(x)}$ را حساب کنید. ۶۴

$$y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow \frac{y - 1}{2} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x - 1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$$

پاسخ: ۱

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x + 1}}{\frac{x - 1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{x - 1}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$D_g = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) - \{1\}$$

اگر f یک تابع خطی باشد و $f(x+1) + f(x+2) = 4x + 7$ مقدار $f^{-1}(3)$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱ چون f یک تابع خطی است. بنابراین $f(x) = ax + b$ است.

$$f(x+1) + f(x+2) = 4x + 7 \Rightarrow a(x+1) + b + a(x+2) + b = 4x + 7$$

$$\Rightarrow ax + a + b + ax + 2a + b = 4x + 7 \Rightarrow 2ax + 3a + 2b = 4x + 7$$

$$\begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ 3a + 2b = 7 \xrightarrow{a=2} 6 + 2b = 7 \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2}$$

$$f^{-1}(3) = k \Rightarrow f(k) = 3 \Rightarrow 2k + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow 2k = 3 - \frac{1}{2} \Rightarrow 2k = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{4} \Rightarrow f^{-1}(3) = \frac{5}{4}$$

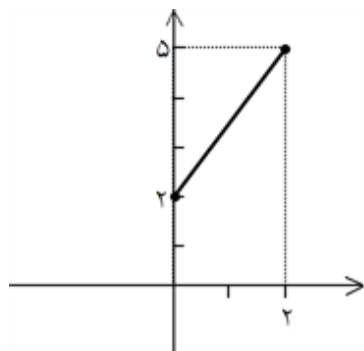
نمودار تابعی با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ رسم کنید:

الف) به شرطی که این تابع یک به یک باشد.

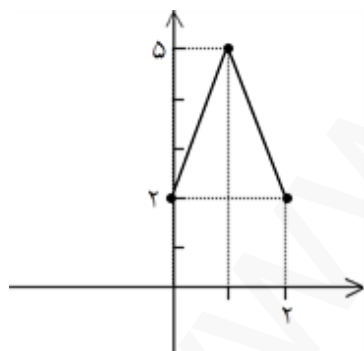
ب) به شرطی که این تابع یک به یک نباشد.

پاسخ: ۱

الف)



ب)



۶۷ وارون تابع $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ را بیابید.

۱ پاسخ: $y = \frac{x-3}{x+1} \Rightarrow yx + y = x - 3 \Rightarrow yx - x = -y - 3 \Rightarrow x = \frac{-y-3}{y-1} \Rightarrow y' = \frac{-x-3}{x-1}$

۶۸ اگر $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x}$ باشد:

- الف) ضابطه‌ی f^{-1} را حساب کنید.
 ب) دامنه $f - f^{-1}$ را بنویسید.
 ج) نمودار $f - f^{-1}$ را رسم کنید.

۱ پاسخ: الف)

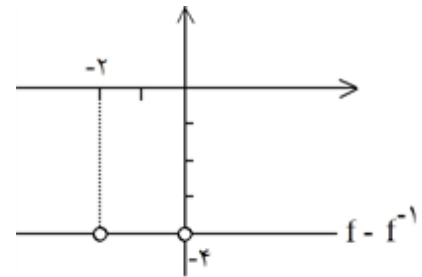
$f(x) = \frac{x(x-2)}{x} \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow y + 2 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x + 2$

ب) تابع f در $(0, -2)$ توخالی است. بنابراین f^{-1} در $(-2, 0)$ تعریف نشده است.

$D_f = R - \{0\}$
 $D_{f^{-1}} = R - \{-2\} \Rightarrow D_{f-f^{-1}} = D_f \cap D_{f^{-1}} = R - \{0, -2\}$

ج)

$(f - f^{-1})(x) = f(x) - f^{-1}(x) = x - 2 - (x + 2) = -4$



۶۹ اگر تابع $f(x) = (b-3)x^2 + 4x - b + 2$ در کل اعداد حقیقی یک به یک باشد، $f^{-1}(3)$ را حساب کنید.

۱ پاسخ: برای آن که تابع در کل اعداد حقیقی یک به یک باشد باید درجه ۲ نباشد بنابراین ضریب x^2 را صفر قرار می‌دهیم.

$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = 4x - 1$

$f^{-1}(3) = a \Rightarrow f(a) = 3 \Rightarrow 4a - 1 = 3 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

۷۰ اگر $f(x) = 3x + \frac{|2x - 2|}{x - 1}$ برای $x > 1$ تعریف شده باشد. ضابطه‌ای f^{-1} را حساب کنید.

$$x > 1 \Rightarrow y = 3x + \frac{2x - 2}{x - 1} \Rightarrow y = 3x + \frac{2(x - 1)}{x - 1} \Rightarrow y = 3x + 2 \Rightarrow y - 2 = 3x$$

$$\xrightarrow{\div 3} \frac{y - 2}{3} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x - 2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}$$

۱ پاسخ:

دکتر متین هوشیار
مدرس شیمی رپیتچ

مهندس علی داودوندی
مدرس ریاضی رپیتچ

مهندس شهاب نصیری
مدرس فیزیک رپیتچ

دکتر الهه بنام
مدرس زیست رپیتچ



رپیتچ

سریعتر یاد بگیری...!

با اساتید رتبه برتر و رتبه پرور
به همراه مشاورین رتبه برتر
تو هم رتبه برتر میشی رفیق

rapiteach.com