رایگان

شب امتحان

ریاضی دوازدهم

دانلود جزوات
شب امتحان

رپیتیچ

ویدیو های
شب امتحان

سریعتر یاد بگیرا

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

علی داودوندی

رتبه ۶۱ کنکور ریاضی

مدرس ریاضی رپیتیچ

فصل ۲ : مثلثات

پایه دوازدهم

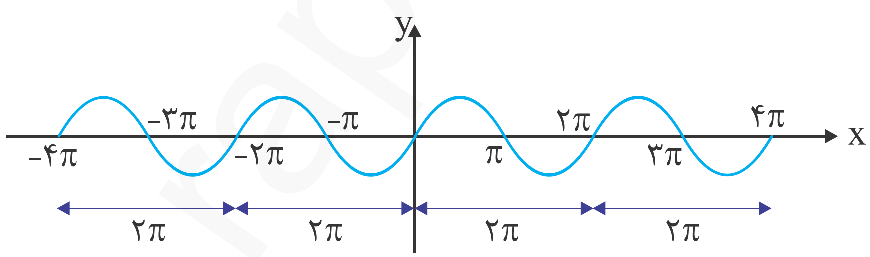
درس ۱: تناوب و تانژانت

تابع متناوب

تابع f را در صورتی متناوب می‌گوییم که عددی مثبت مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ دو شرط مقابل را داشته باشیم:

$$\begin{cases}(x \pm T) \in D_f \\ f(x \pm T) = f(x)\end{cases}$$

کوچک‌ترین عدد مثبت T را دورهٔ تناوب f می‌نامیم. مثلاً دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin x$ برابر ۲π است، زیرا دو شرط بالا را دارد یعنی اولاً دامنهٔ تابع برابر R است پس $(x \pm ۲\pi) \in D_f$ است و ضمناً $\sin(x \pm ۲\pi) = \sin x$ می‌باشد. پس نمودار تابع $\sin x$ در هر بازه به طول ۲π عیناً تکرار می‌شود:



نکتهٔ مهم: در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ مقدار ماکزیمم برابر $|a|+c$ و مقدار مینیمم برابر $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب برابر $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ می‌باشد. ضمناً همواره داریم: $c = \frac{\max + \min}{۲}$. مثلاً در تابع $y = -۳\cos ۲x + ۱$ خواهیم داشت:

$$\max = |-۳| + ۱ = ۴ \qquad \min = -|-۳| + ۱ = -۳ + ۱ = -۲$$

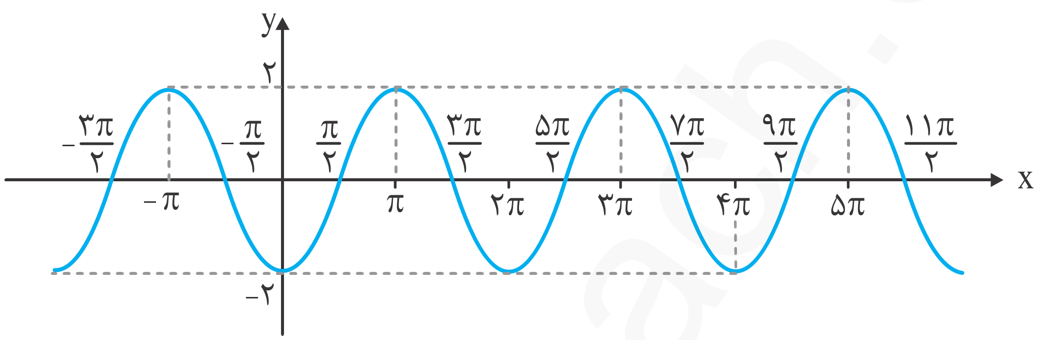
$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|۲|} = \pi$$

نکته مهم:

$$a\sin(bx)+c \rightarrow \begin{cases} \nearrow & \quad 0 \\ \searrow & \quad 0 \end{cases}$$

$$a\cos(bx)+c \rightarrow \begin{cases} \searrow & \quad) \\ \nearrow & \quad) \end{cases}$$

مثال: نمودار زیر مربوط به تابع $f(x)=a\cos bx+c$ است. مقادیر a، b و c را به دست آورید.



پاسخ:

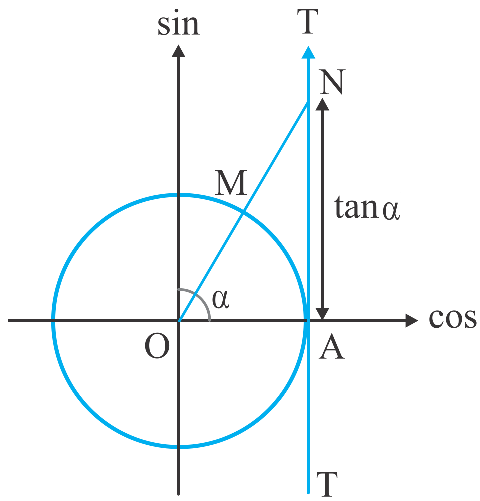
$$\begin{cases} \max = ۲ \\ \min = -۲ \end{cases} \Rightarrow c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۲+(-۲)}{۲}=۰$$

$$\max = |a|+c \Rightarrow ۲=|a|+۰ \Rightarrow |a|=۲ \Rightarrow a=\pm ۲$$

ولی با توجه به شکل، چون $f(۰)=-۲$ می‌باشد فقط $a=-۲$ قابل قبول است. همچنین با توجه به شکل، دورهٔ تناوب برابر ۲π است، لذا:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow ۲\pi=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=۱ \Rightarrow b=\pm ۱$$

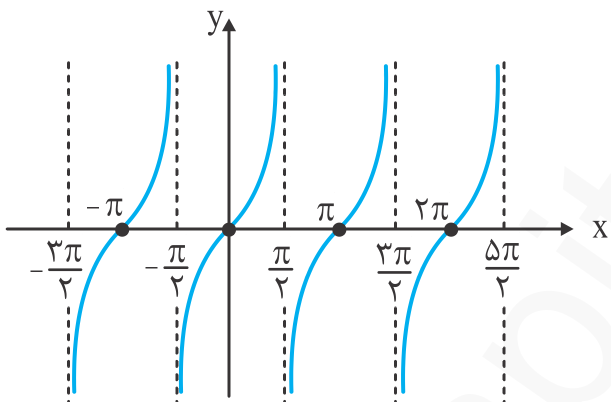
تانژانت



محور TT' در شکل مقابل، محور تانژانت‌ها نام دارد. برای یافتن مقدار تانژانت زاویه‌ای مثل α، پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت‌ها را در نقطه‌ای مثل N قطع کند اندازهٔ پاره‌خط AN همان $\tan\alpha$ می‌باشد.

(نقطهٔ A مبدأ تانژانت است.)

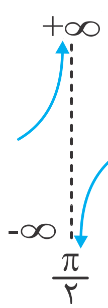
اگر $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ باشد، $\tan\alpha$ تعریف نشده است چون اگر پاره‌خط OM را امتداد دهیم محور TT' را قطع نمی‌کند؛ پس $\tan\frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است.



با توجه به توضیحات بالا تابع $y=\tan x$ به صورت روبه‌رو قابل رسم می‌باشد. ضمنا تابع $y=\tan x$ متناوب است و دورهٔ تناوب آن $T=\pi$ است، هم‌چنین دامنه و برد تانژانت به صورت زیر است:

$$D_y=\{x\in R \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in Z\} \ , \ R_y=R$$

مثال: تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ صعودی است یا نزولی؟



پاسخ: با توجه به نمودارهای که رسم کردیم واضح است که تابع در بازه‌های $(۰,\frac{\pi}{۲})$، $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$ اکیداً صعودی است ولی در کل بازهٔ $[۰,۲\pi]$ غیریکنوا است (نه صعودی است، نه نزولی)؛ چون مثلاً در نزدیکی $x=\frac{\pi}{۲}$ شاخهٔ سمت چپ به $+\infty$ و شاخهٔ سمت راست به $-\infty$ می‌رود. (به دو طرف $x=\frac{\pi}{۲}$ در شکل توجه کنید.) یعنی از $+\infty$ ناگهان به $-\infty$ می‌رود. به طور کلی در بازه هایی اکیدا صعودی است که هیچ مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ نباشد.

تغییرات $\tan x$ در ۴ ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی

در هر ربع دایرهٔ مثلثاتی، با زیاد شدن مقدار زاویه، $\tan$ آن زاویه هم زیاد می‌شود پس در هر ربع دایره، $\tan x$ اکیداً صعودی است. توجه کنید اگر گفته شود: «$y=\tan x$ در بازهٔ $(0,\pi)$ صعودی است یا نزولی؟»، می‌گوییم نه صعودی است، نه نزولی؛ چون بازهٔ $(0,\pi)$ شامل دو ناحیهٔ مختلف می‌باشد.

درس ۲: معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان (2α)

برای محاسبهٔ $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ به کمک نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \xrightarrow[\text{دیدید از فرمول زیر استفاده کنید.}]{\text{اگر در متن سوال } \sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

مثال: مقادیر $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ و $\tan 15^\circ$ را حساب کنید.

پاسخ: 15° را α فرض می‌کنیم و از فرمول‌های قبل استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \Rightarrow \cos 2(15^\circ) = 1-2\sin^2 15^\circ$$

$$\Rightarrow \cos 30^\circ = 1-2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1-2\sin^2 15^\circ$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 15^\circ = 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 15^\circ = 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

ضمناً از سال‌های قبل می‌دانیم که $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ لذا:

$$\cos^{2} 15° = 1 - \sin^{2} 15° = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{4-2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos 15° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

مثال: اگر α زاویه‌ای حاده و $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ باشد، حاصل $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\cos^{2}\alpha = 1 - \sin^{2}\alpha \xrightarrow{\sin\alpha = \frac{3}{5}} \cos^{2}\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده‌است.}} \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^{2}\alpha - \sin^{2}\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$$

معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی، ابتدا به کمک فرمول‌ها و اتحادهای مثلثاتی، تعداد نسبت‌های مثلثاتی را کاهش می‌دهیم تا دو طرف معادله، سینوس یا هر دو طرف معادله کسینوس باشند سپس خواهیم داشت:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

به جواب‌های بالا جواب‌های کلی (عمومی) می‌گوییم ولی اگر جواب‌های خاصی مدنظر باشد به k اعداد صحیح را نسبت می‌دهیم تا xهایی که در یک بازهٔ خاص هستند به دست آیند. حالت‌های خاص معادلات سینوسی و کسینوسی هم عبارت‌اند از:

$$\sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \qquad \cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi$$

$$\sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \qquad \cos x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi$$

$$\sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \qquad \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

تذکر: در تمام معادلات بالا به جای x هر عبارت دیگری هم ممکن است بیاید؛ مثلاً اگر $\sin ۳x = ۱$ باشد،

آن‌گاه: $۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه: $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}$

مثال: معادلات زیر را حل کرده و جواب‌های کلی آن‌ها را به دست آورید. در قسمت (ت) جواب‌هایی که در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ هستند را به دست آورید.

الف) $\sin ۳x - \sin ۲x = ۰$

ب) $۴\cos^۲ x - ۱ = ۰$

پ) $۴\sin^۲ x - ۳ = ۰$

ت) $۲\sin^۲ t + \sin t - ۱ = ۰$

ث) $\cos ۲x + \cos \frac{x}{۲} = ۰$

ج) $\sin ۴x = \cos x$

پاسخ:

الف)

$$\sin ۳x = \underset{\alpha}{\sin ۲x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - ۲x \Rightarrow ۵x = ۲k\pi + \pi \\ \xrightarrow{\div ۵} x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۵} \end{cases}$$

$$۴\cos^۲ x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{جذر}} \cos x = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} = \cos \overset{\alpha}{\boxed{\frac{\pi}{3}}} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \underset{\alpha}{\boxed{\frac{2\pi}{3}}} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

در معادلهٔ $\cos x = -\frac{1}{2}$ ابتدا می‌گوییم $\cos\frac{\pi}{3}$ می‌شود $\frac{1}{2}$، حالا به خاطر وجود علامت $(-)$ می‌گوییم که:

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

پ)

$$4\sin^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{جذر}} \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\underset{\alpha}{(-\frac{\pi}{3})} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{3}) \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{3}) \end{cases} \end{cases}$$

ت)

$$\underset{a}{2}\sin^2 t + \underset{b}{1}\sin t - \underset{c}{1} = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9$$

$$\Rightarrow \sin t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin t = \sin \overset{\alpha}{\boxed{\frac{\pi}{6}}} \Rightarrow \begin{cases} t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} t = \frac{\pi}{6} \\ t = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} t = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \sin t = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} t = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{k=0} t = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ث)

$$\cos 2x = -\cos\frac{x}{2} = \cos\underbrace{(\pi - \frac{x}{2})}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm (\pi - \frac{x}{۲}) \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{x}{۲} \Rightarrow x = \frac{۴k\pi}{۵} + \frac{۲\pi}{۵} \\ ۲x = ۲k\pi - \pi + \frac{x}{۲} \Rightarrow x = \frac{۴k\pi}{۳} - \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

ج) $\sin ۴x = \cos x = \sin \underbrace{(\frac{\pi}{۲} - x)}_{\alpha}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۱۰} \\ ۴x = ۲k\pi + \pi - (\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

دقت کنید که در این معادله، چون یک طرف $\sin$ و یک طرف $\cos$ بود به کمک زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ کسینوس را به سینوس تبدیل کردیم تا دو طرف هم‌نام شوند. البته می‌توانستید $\sin$ را به $\cos$ تبدیل کنید و بنویسید:

$\cos(\frac{\pi}{۲} - ۴x) = \cos \underset{\alpha}{x} \Rightarrow$ ادامهٔ حل

ضمناً مهم نیست زاویهٔ سمت راست را α فرض کنیم یا زاویهٔ سمت چپ را ولی ما همه‌جا، زاویهٔ سمت راست را α فرض کرده‌ایم.

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید.

$$y=\sqrt{۳}-\text{Sin}\left(\frac{\pi}{۲}x\right)$$

پاسخ: ۱

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow T=۴ \qquad \text{Max}:|a|+c=۱+\sqrt{۳}$$
$$\text{Min}:-|a|+c=-۱+\sqrt{۳}$$

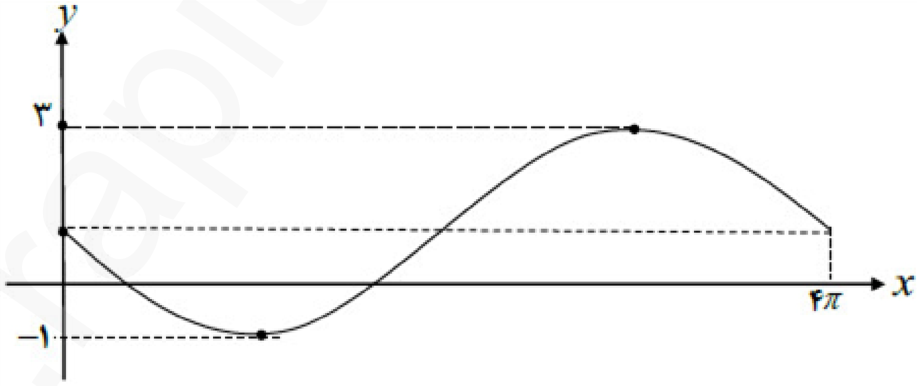
۲ ضابطه تابعی به صورت $y=a\,\text{Cos}\,\text{bx}+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن ۱- باشد.

پاسخ: ۱

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۲\Rightarrow |b|=\pi$$
$|a|=۲\,,c=۱\Rightarrow y=-۲\,\text{Cos}\,(\pi \text{x})+۱$ یا $y=۲\,\text{Cos}\,(\pi\text{x})+۱$

تنها نوشتن یکی از ضابطه‌های بالا کافی است.

۳ نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a\,\text{Sin}\,\text{bx}+۱$ است. حاصل ab را بیابید.

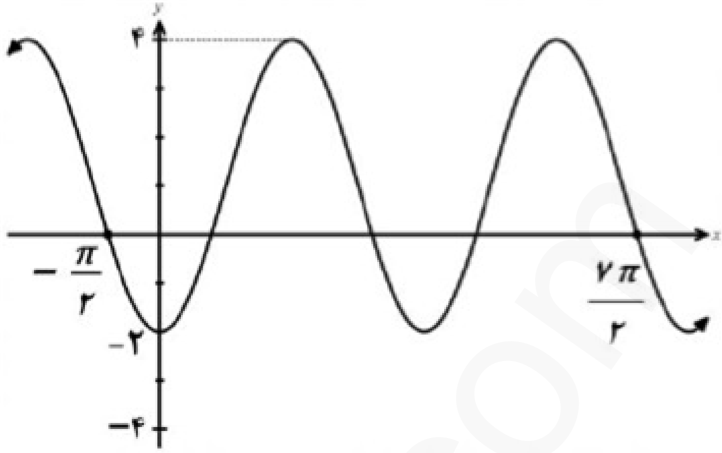


پاسخ: ۱

$$\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$
$$|a|=\frac{۳-(-۱)}{۲}=۲\Rightarrow a=\pm۲$$

با توجه به نمودار تابع، ab باید عدد منفی شود بنابراین $\text{ab}=-۱$

۴ نمودار تابع با ضابطه $y = a\,\mathrm{Cos}\,\mathrm{bx} + c$ به صورت زیر رسم شده است. مقدار a، b و c را به دست آورید.



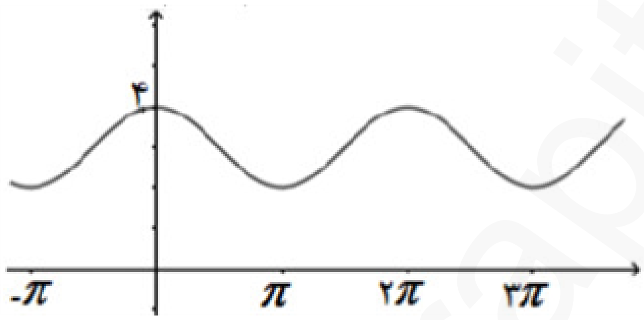
پاسخ: ۱

$$۲T = \frac{۷\pi}{۲} - \left(-\frac{\pi}{۲}\right) = ۴\pi \Rightarrow T = ۲\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \Rightarrow b = \pm ۱$$

$$c = \frac{۴ + (-۲)}{۲} = ۱$$

$$\left.\begin{array}{l} |a| = \frac{۴-(-۲)}{۲} = ۳ \\ \text{در } x = ۰ \\ \text{مینیمم دارد} \quad \Rightarrow a < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a = -۳$$

۵ نمودار تابع $f(x) = a + \mathrm{Cos}\,\mathrm{bx}$ به صورت مقابل است. حاصل $a + b$ را به دست آورید. $(b > ۰)$



پاسخ: ۱

$$\mathrm{Max} = ۴ \Rightarrow a + ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۳$$

$$T = ۲\pi : \frac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow \quad b = ۱ \qquad a = ۳ \quad a + b = ۴$$

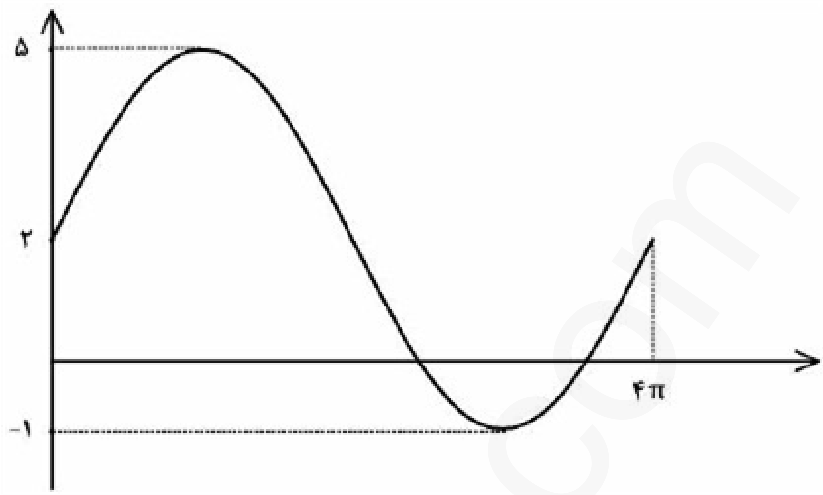
۶ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = ۳\,\mathrm{Cos}\,(\pi\mathrm{x}) + ۲$ را به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|\pi|} = ۲$$

$$\max = |a| + c = ۵ \qquad \min = -|a| + c = -۱$$

۷ نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y=a\,\mathrm{Sin}\,\mathrm{bx}+c$ است. مقادیر a و b و c را محاسبه کنید و ضابطه آن‌را مشخص نمایید.



پاسخ: ۱

$$\begin{cases} |a|+c=۵ \\ -|a|+c=-۱ \end{cases} \Rightarrow c=۲, a=\pm ۳$$

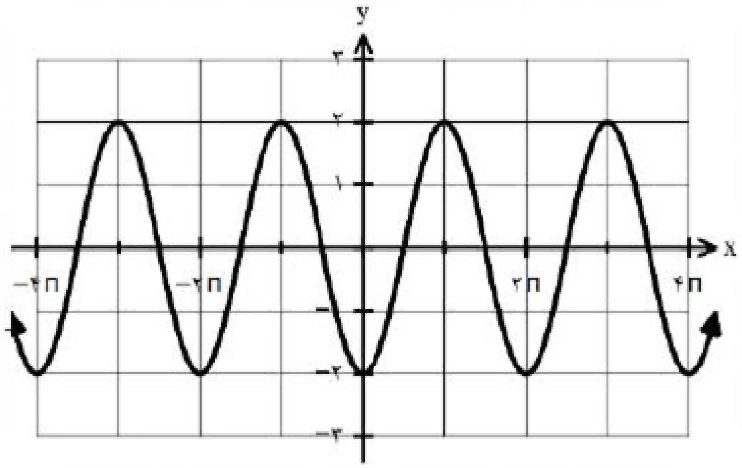
$$۴\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۳\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{۲}+۲, y=-۳\,\mathrm{Sin}\left(-\frac{x}{۲}\right)+۲$$

۸ معادله‌ی یک تابع سینوسی $y=a\,\mathrm{Sin}\,(\mathrm{bx})+c$ را بنویسید که برد آن $[-۴,۴]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.

پاسخ: ۱

$$\begin{matrix} |b|=\frac{۲\pi}{۲}=\pi\Rightarrow b=\pm\pi \\ |a|=\frac{۴-(-۴)}{۲}=۴\Rightarrow a=\pm ۴ \\ c=\frac{۴+(-۴)}{۲}=۰ \end{matrix} \Rightarrow y=\pm ۴\,\mathrm{Sin}\,(\pm\pi \mathrm{x})$$

۹ نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x) = a\,\mathrm{Cos}\,\mathrm{bx} + c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن‌را مشخص کنید.



پاسخ: ۱

$$|a| = \frac{۲-(-۲)}{۲} = ۲ \Rightarrow a = -۲$$

$$|b| = \frac{۲\pi}{۲\pi} = ۱ \Rightarrow b = ۱ \qquad f(x) = -۲\,\mathrm{Cos}\,x$$

$$c = \frac{۲+(-۲)}{۲} = ۰$$

۱۰ ضابطه تابعی سینوسی یا کسینوسی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده را بنویسید.

$$T = \frac{\pi}{۴}, \max = ۴, \min = -۲$$

پاسخ: ۱

$$y_{\max} = |a| + c = ۴$$

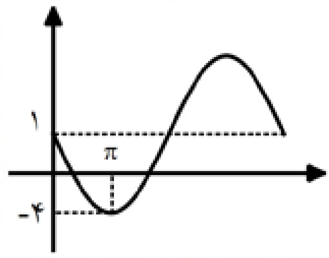
$$y_{\min} = -|a| + c = -۲$$

$$\Rightarrow ۲\mathrm{c} = ۲ \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow |a| = ۳ \Rightarrow a = ۳$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow b = ۸$$

$$y = a\,\mathrm{Sin}\,(\mathrm{bx}) + c \Rightarrow y = ۳\,\mathrm{Sin}\,(۸\mathrm{x}) + ۱$$

۱۱ با توجه به نمودار داده شده جدول زیر را کامل کنید.



تناوب	می‌نیمم	ماکزیمم	ضابطه تابع

پاسخ: ۱ این یک تابع Sin با ضریب منفی است و مینیمم آن ۴- و با توجه به شکل ماکزیمم باید ۶ باشد یعنی ۵ واحد بالاتر از یک و یک چهارم تناوب π است در نتیجه تناوب ۴π است.

$$y_{\max} = |a| + c = ۶$$

$$y_{\min} = -|a| + c = -۴$$

$$\Rightarrow ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow |a| = ۵ \Rightarrow a = -۵$$

$$T = \frac{۲\pi}{b} = ۴\pi \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$y = -۵\,\mathrm{Sin}\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$$

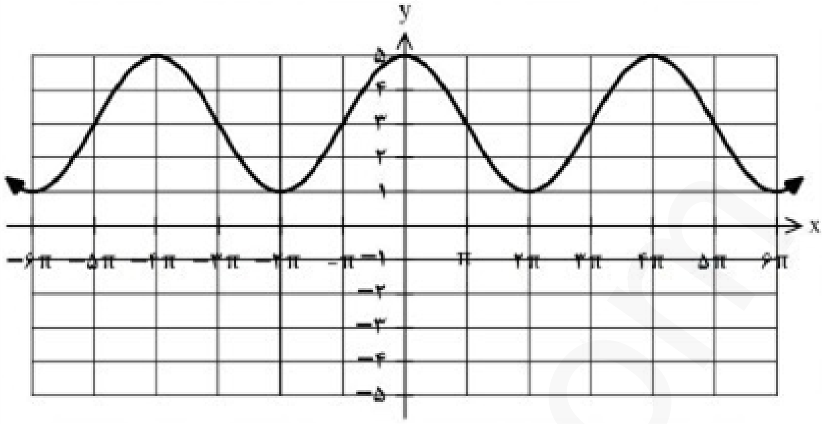
تناوب	می‌نیمم	ماکزیمم	ضابطه تابع
۴π	-۴	۶	$y = -۵\,\mathrm{Sin}\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$

۱۲ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

- برد تابع تانژانت $y = \mathrm{tg}\, x$ برابر .... است.

پاسخ: ۱ R

۱۳ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a\,\text{Cos}\,\text{bx} + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن‌را مشخص کنید.



پاسخ: ۱

$$c = \frac{۵+۱}{۲} = ۳$$
$$|a| = \frac{۵-۱}{۲} = ۲ \quad a > ۰, a = ۲$$
$$b = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۲\,\text{Cos}\left(\frac{x}{۲}\right) + ۳$$

یا

$$\Rightarrow y = ۲\,\text{Cos}\left(-\frac{x}{۲}\right) + ۳$$

۱۴ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

دامنه تابع با ضابطه‌ی $y = \text{tg}\,x$ به صورت $\{x \in \text{R} | x \neq \ldots\}$ است.

پاسخ: ۱

$$x \neq \text{k}\pi + \frac{\pi}{۲} : k \in \text{z}$$

۱۵ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sqrt{۵} - \pi\,\text{Cos}\,\frac{۱}{۲}x$ را محاسبه کنید.

پاسخ: ۱

$$\max = \pi + \sqrt{۵}, \min = -\pi + \sqrt{۵}, T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi$$

۱۶ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = \text{tg}\,x$ برابر .... است.

پاسخ: ۱ π

۱۷ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در بازه $\left(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right)$ اکیداً صعودی است.

ب) نقاطی به فرم $x = \mathrm{k}\pi + \frac{\pi}{۲}, (k \in \mathrm{Z})$ در دامنه تابع تانژانت قرار دارند.

پاسخ: ۱ الف) درست ب) نادرست

۱۸ دامنه تابع $f(x) = \mathrm{tg}\,(۵\pi \mathrm{x})$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$۵\pi\mathrm{x} \neq \mathrm{k}\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div(۵\pi)} x \neq \frac{k}{۵} + \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow D = \left\{x | x \in \mathrm{R}, x \neq \frac{k}{۵} + \frac{۱}{۱۰}\right\}$$

۱۹ در تابع $f(x) = \pi\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi \mathrm{x}}{۲}\right) + ۱$ تناوب، بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$T = \frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۲}\right|} = ۴$$

$$\begin{cases} y_{\max} = \pi(۱) + ۱ = \pi + ۱ \\ y_{\min} = \pi(-۱) + ۱ = -\pi + ۱ \end{cases}$$

۲۰ در تابع $f(x) = ۳\,\mathrm{Cos}^{۳} x\,\mathrm{Sin}\,x - ۳\,\mathrm{Sin}^{۳} x\,\mathrm{Cos}\,x + ۱$ تناوب، بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\begin{cases} \mathrm{Cos}\,۲\alpha = \mathrm{Cos}^{۲}\alpha - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha \\ \mathrm{Sin}\,۲\alpha = ۲\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha \end{cases}$$

$$f(x) = ۳\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x(\mathrm{Cos}^{۲} x - \mathrm{Sin}^{۲} x) + ۱ \Rightarrow f(x) = ۳\left(\frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}\,۲x\right)\mathrm{Cos}\,۲x + ۱$$

$$\Rightarrow \mathrm{f(x)} = \frac{۳}{۲}\underbrace{\mathrm{Sin}\,۲\mathrm{x}\,\mathrm{Cos}\,۲\mathrm{x}}_{\frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}\,۴\mathrm{x}} + ۱ \Rightarrow \mathrm{f(x)} = \frac{۳}{۴}\mathrm{Sin}(۴\mathrm{x}) + ۱$$

$$T = \frac{۲\pi}{|۴|} = \frac{۲\pi}{۴} \Rightarrow T = \frac{\pi}{۲}$$

$$\begin{cases} y_{\max} = \frac{۳}{۴}(۱) + ۱ = \frac{۷}{۴} \\ y_{\min} = \frac{۳}{۴}(-۱) + ۱ = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

۲۱ در تابع $f(x) = ۲\cos^۲ x - ۲\sin^۲ x + ۳$ تناوب، بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$$
$$f(x) = ۲(\cos^۲ x - \sin^۲ x) + ۳ \Rightarrow f(x) = ۲\cos ۲x + ۳$$
$$T = \frac{۲\pi}{|۲|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$
$$\begin{cases} y_{\max} = ۲(۱) + ۳ = ۵ \\ y_{\min} = ۲(-۱) + ۳ = ۱ \end{cases}$$

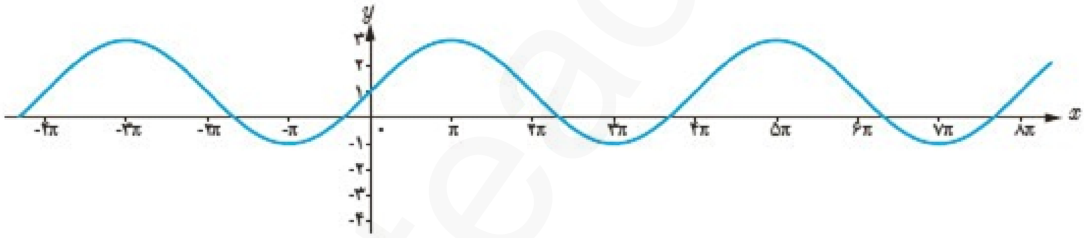
۲۲ تناوب تابع $y = \mathrm{tg}\, ۳x$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

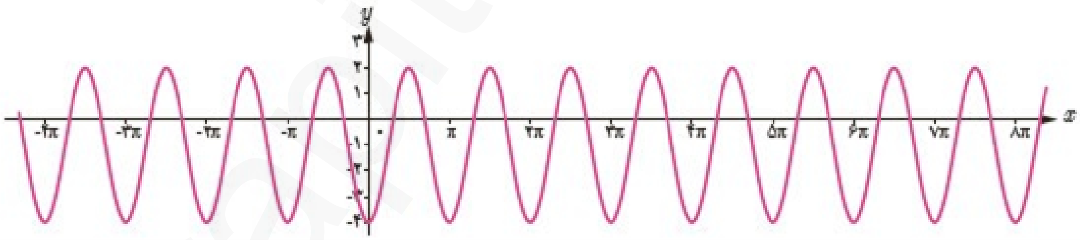
$$T = \frac{\pi}{|۳|} = \frac{\pi}{۳}$$

۲۳ ضابطه‌ی مربوط به هریک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

الف)



ب)



پاسخ: ۱

الف) $\max = ۳, \min = -۱, T = ۴\pi$

$$c = \frac{۳ + (-۱)}{۲} = ۱, a = \frac{۳ - (-۱)}{۲} = ۲, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$$
$$y = ۲\sin\left(\frac{۱}{۲}x\right) + ۱$$

ب) $\max = ۲, \min = -۴, T = \pi$

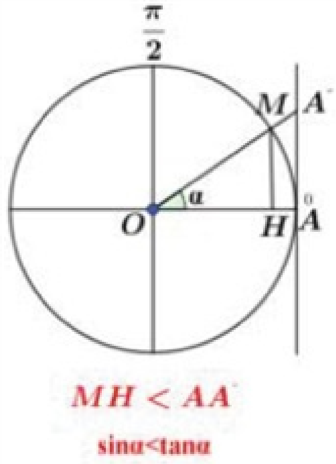
$$c = \frac{۲ + (-۴)}{۲} = -۱, a = \frac{۲ - (-۴)}{۲} = ۳, |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$$
$$y = -۳\cos(۲x) - ۱$$

۲۴ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\operatorname{Sin}\alpha$ و $\operatorname{tg}\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$

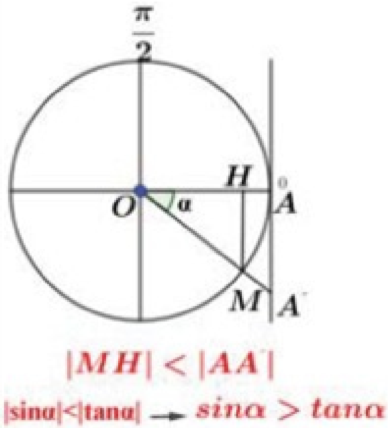
ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

پاسخ: **۱** الف) در ربع اول هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.



	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$
Sin	۰	↗	$\frac{۱}{۲}$	↗	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↗	۱
tg	۰	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	↗	۱	↗	$\sqrt{۳}$	↗	$+\infty$ ت ن

ب) در ربع چهارم هم سینوس و هم تانژانت صعودی است.



	$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		$\frac{۱۱\pi}{۶}$		۲π
Sin	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↗	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	$-\frac{۱}{۲}$	↗	۰
tg	ت ن	↗	$-\sqrt{۳}$	↗	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	↗	۰

۲۵ دامنه تابع $y = ۵ - ۲\operatorname{tg}(\pi x)$ را به دست آورید.

پاسخ: **۱**

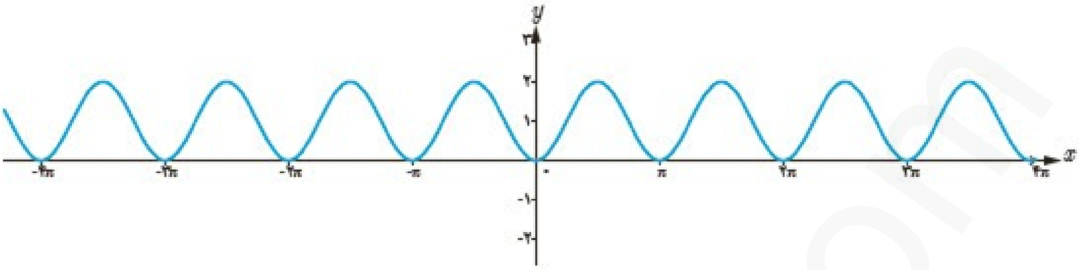
$$y = ۵ - ۲\operatorname{tg}(\pi x) \Rightarrow \pi x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\div(\pi)} x \neq k + \frac{۱}{۲}$$

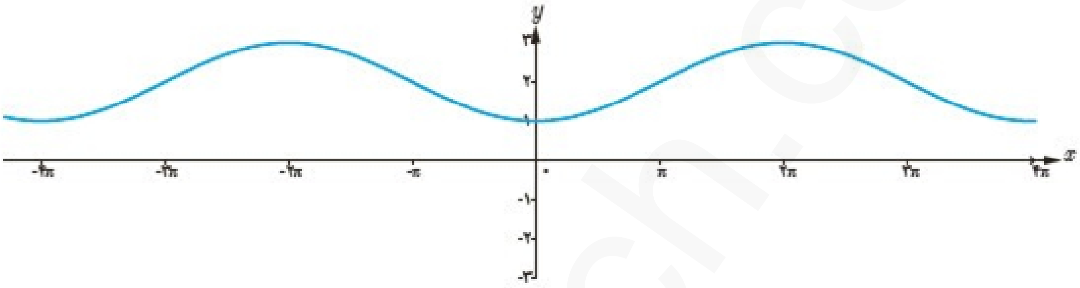
$$D = \left\{ x | x \in \mathrm{R}, x \neq k + \frac{۱}{۲} \right\}$$

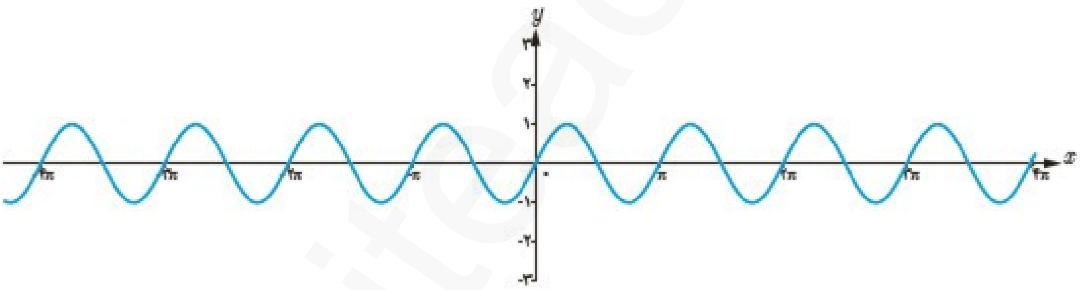
۲۶ هریک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

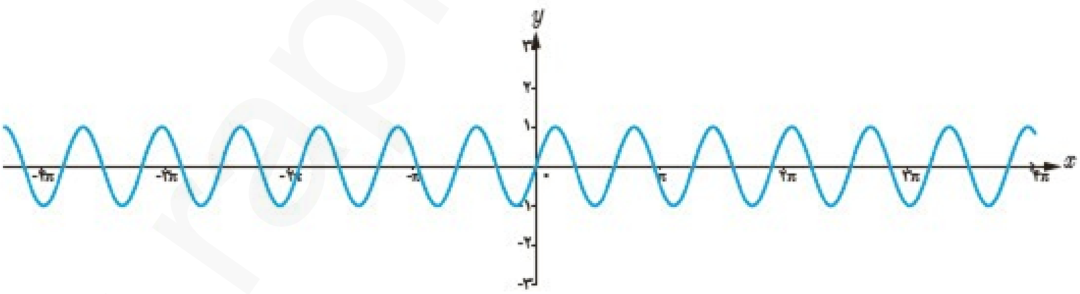
الف) $y = \operatorname{Sin} \pi x$ ب) $y = ۲ - \operatorname{Cos} \frac{۱}{۲} x$

پ) $y = \operatorname{Sin} ۲x$ ت) $y = ۱ - \operatorname{Cos} ۲x$

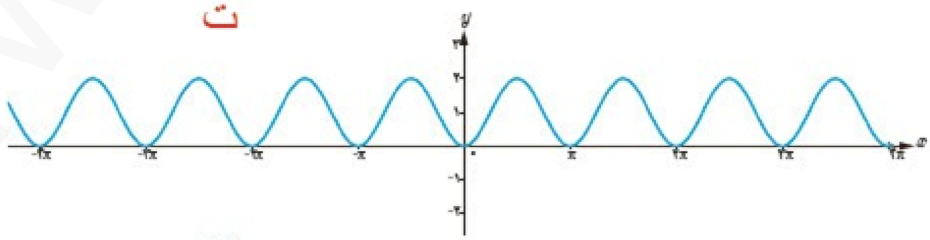
۱) 

۲) 

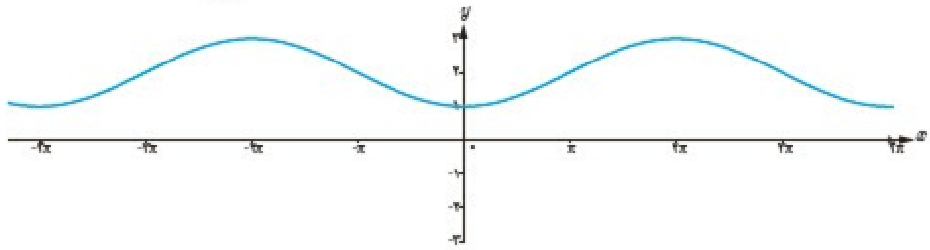
۳) 

۴) 

ت

۱) 

ب

۲) 

پ

پاسخ: ۱

۲۷ دوره تناوب و ماکزیمم و می‌نیمم هریک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۳ + ۲\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{۲}x\right)$ ب) $y = ۳ - \mathrm{Sin}\left(-\frac{۱}{۲}x + \pi\right)$

پاسخ: ۱ می‌دانیم برای توابع Sin و Cos داریم:

$$\left.\begin{array}{l} y = a\,\mathrm{Sin}\,(\,\mathrm{bx}\,) + c \\ y = a\,\mathrm{Cos}\,(\,\mathrm{bx}\,) + c \end{array}\right\} \Rightarrow y_{\max} = |a| + c, y_{\min} = -|a| + c, T = \frac{۲\pi}{|b|}$$

با توجه به ضابطه الف باید واحدهای محور طول تغییر کند. الف)

$$y_{\max} = |۲| + ۳ = ۵, y_{\min} = -|۲| + ۳ = ۱, T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}$$

ب)

$$y_{\max} = |-۱| + ۳ = ۴, y_{\min} = -|-۱| + ۳ = ۲, T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi$$

۲۸ نشان دهید تابع زیر متناوب است و دوره‌ی تناوب(دوره‌ی تناوب اصلی) آن را تعیین کنید.

$$y = ۲ - \tan\,(x)$$

پاسخ: ۱

$$f(x + c) = f(x) \to ۲ - \mathrm{tg}\,(x + c) = ۲ - \mathrm{tg}\,x \to \mathrm{tg}\,(x + c) = \mathrm{tg}\,x \to x + c = \mathrm{k}\pi + x$$

$$\to c = \mathrm{k}\pi \to T = \pi$$

۲۹ نشان دهید تابع زیر متناوب است و دوره‌ی تناوب(دوره‌ی تناوب اصلی) آن را تعیین کنید.

$$y = ۱ + \mathrm{Cos}^{۲}(x)$$

پاسخ: ۱

$$f(x) = ۱ + \mathrm{Cos}^{۲}x \to f(x) = ۱ + \frac{۱ + \mathrm{Cos}\,۲\mathrm{x}}{۲} = \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}\mathrm{Cos}\,۲\mathrm{x}$$

$$f(x + c) = f(x) \to \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}\mathrm{Cos}\,(۲\mathrm{x} + ۲\mathrm{c}) = \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}\mathrm{Cos}\,۲\mathrm{x} \to \mathrm{Cos}\,(۲\mathrm{x} + ۲\mathrm{c}) = \mathrm{Cos}\,۲\mathrm{x}$$

$$\to ۲\mathrm{x} + ۲\mathrm{c} = ۲\mathrm{k}\pi + ۲\mathrm{x} \to c = \mathrm{k}\pi \Rightarrow T = \pi$$

۳۰ معادله مثلثاتی $۲\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را حل کنید.

پاسخ: ۱

$$\mathrm{Sin}\,۲x = \mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{۳}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ۲x = ۲\mathrm{k}\pi + \frac{\pi}{۳} \\ ۲x = ۲\mathrm{k}\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{array}\right. k \in \mathrm{Z} \left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{k}\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = \mathrm{k}\pi + \frac{\pi}{۳} \end{array}\right. k \in \mathrm{Z}$$

۳۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- خط $y=\frac{۱}{۲}$، نمودار تابع $y=\operatorname{Sin}x$ را در فاصله $[۰,۲\pi]$ در یک نقطه قطع می‌کند.

پاسخ: ۱ نادرست

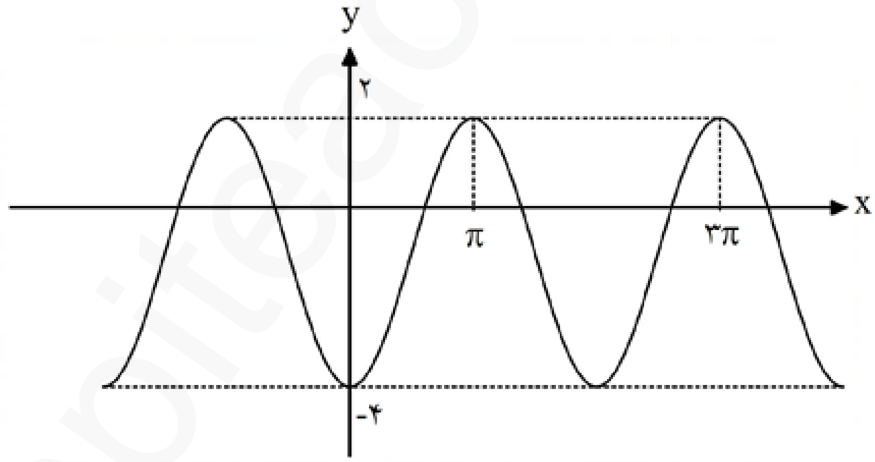
۳۲ جواب‌های معادله مثلثاتی $۴\operatorname{Sin}x+۲\sqrt{۳}=۰$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$۴\operatorname{Sin}x+۲\sqrt{۳}=۰\Rightarrow \operatorname{Sin}x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow \operatorname{Sin}x=\operatorname{Sin}\left(-\frac{\pi}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\\ x=۲k\pi+\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}(k\in Z)\xrightarrow{[۰\,,\,۲\pi]}\begin{cases}x=\frac{۵\pi}{۳}\\ x=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}$$

۳۳ اگر نمودار $y=a\operatorname{Sin}^{۲}(\mathrm{bx})+c$ به صورت زیر باشد، a,b,c را حساب کنید $(b>۰)$



پاسخ: ۱

$$\operatorname{Sin}^{۲}\theta=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\operatorname{Cos}(۲\theta)$$

$$y=a\operatorname{Sin}^{۲}(\mathrm{bx})+c=a\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\operatorname{Cos}(۲\mathrm{bx})\right)+c=\frac{a}{۲}-\frac{a}{۲}\operatorname{Cos}(۲\mathrm{bx})+c$$

بنابراین برای تناوب داریم:

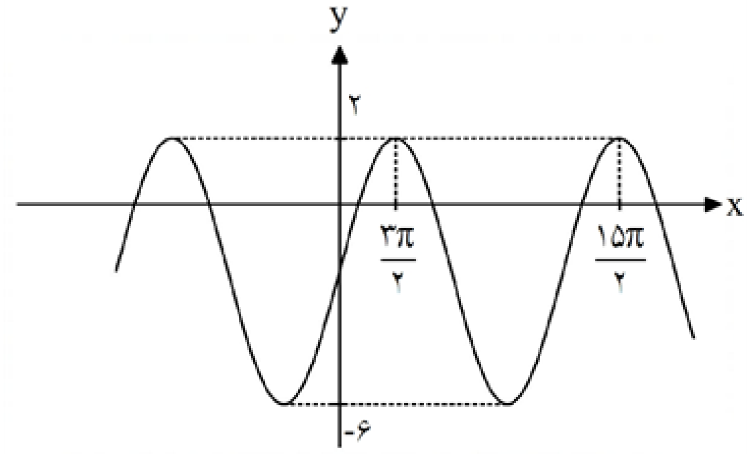
$$T=۳\pi-\pi\Rightarrow T=۲\pi\Rightarrow\frac{۲\pi}{۲\mathrm{b}}=۲\pi\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}$$

تابع از نقاط $A(۰,-۴)$ و $B(\pi,۲)$ می‌گذرد. بنابراین با جاگذاری در خود تابع می‌توان a,c را حساب کرد.

$$A(۰,-۴)\Rightarrow a\operatorname{Sin}^{۲}(۰)+c=-۴\Rightarrow c=-۴$$

$$B(\pi,۲)\Rightarrow a\operatorname{Sin}^{۲}\left(\frac{\pi}{۲}\right)-۴=۲\Rightarrow a-۴=۲\Rightarrow a=۶$$

۳۴ نمودار تابع $y = a\,\mathrm{Sin}\,(\,\mathrm{bx}\,)\,\mathrm{Cos}\,(\,\mathrm{bx}\,) + c$ به صورت زیر است. مقادیر a, b, c را حساب کنید. $(b > ۰)$



پاسخ: ۱

$$\mathrm{Sin}\,\theta \times \mathrm{Cos}\,\theta = \frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}\,۲\theta$$

$$y = a\,\mathrm{Sin}\,(\,\mathrm{bx}\,)\,\mathrm{Cos}\,(\,\mathrm{bx}\,) + c \Rightarrow y = \frac{a}{۲}\mathrm{Sin}\,(۲\mathrm{bx}) + c$$

با توجه به نمودار صورت سؤال این تابع Sin با ضریب مثبت است. بنابراین:

$$\begin{cases} y_{\max} = \left|\frac{a}{۲}\right| + c = ۲ \\ y_{\min} = -\left|\frac{a}{۲}\right| + c = -۶ \end{cases} \Rightarrow ۲\mathrm{c} = -۴ \Rightarrow c = -۲$$

$$\xrightarrow{c=-۲} \left|\frac{a}{۲}\right| - ۲ = ۲ \Rightarrow \left|\frac{a}{۲}\right| = ۴ \xrightarrow{a>۰} a = ۸$$

$$T = \frac{۱۵\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow T = ۶\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{۲\mathrm{b}} = ۶\pi \Rightarrow b = \frac{۱}{۶}$$

۳۵ جواب(های) معادله مثلثاتی $\mathrm{Cos}\,۲x - \mathrm{Cos}\,x = ۰$ را در بازه $(۰, \pi)$ مشخص کنید.

پاسخ: ۱

$$\mathrm{Cos}\,۲x = \mathrm{Cos}\,x \Rightarrow ۲x = ۲\mathrm{k}\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{۲\mathrm{k}\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲\pi}{۳}$$

۳۶ معادله مثلثاتی $\mathrm{Cos}\,۲x - \mathrm{Cos}\,x + ۱ = ۰$ را در بازه $۰ \leq x \leq \pi$ حل کنید.

پاسخ: ۱

$$۲\,\mathrm{Cos}^{۲}x - ۱ - \mathrm{Cos}\,x + ۱ = ۰ \Rightarrow \mathrm{Cos}\,x(۲\,\mathrm{Cos}\,x - ۱) = ۰$$

$$\begin{cases} \mathrm{Cos}\,x = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲} \\ \mathrm{Cos}\,x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۳۷ معادله مقابل را حل کنید. $\text{Cos}\,۲x - ۳\,\text{Sin}\,x + ۴ = ۰$

پاسخ: ۱ $۱ - ۲\,\text{Sin}^۲ x - ۳\,\text{Sin}\,x + ۴ = ۰ \Rightarrow -۲\,\text{Sin}^۲ x - ۳\,\text{Sin}\,x + ۵ = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Sin}\,x = -\frac{۵}{۲} \quad \text{غ ق ق} \\ \text{Sin}\,x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

۳۸ معادله مثلثاتی $۲\,\text{Cos}^۲ x + \text{Cos}\,x = ۰$ را حل کنید.

پاسخ: ۱

$$\text{Cos}\,x(۲\,\text{Cos}\,x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{Cos}\,x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲\,\text{Cos}\,x + ۱ = ۰ \Rightarrow \text{Cos}\,x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

۳۹ معادله مثلثاتی $\text{Sin}\,۲x = \text{Sin}\,x$ را حل کنید.

پاسخ: ۱

$$\text{Sin}\,۲x = \text{Sin}\,x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = ۲k\pi\,,\ k \in Z \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳}\,,\ k \in Z \end{cases}$$

۴۰ حاصل عبارت $۴\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,۲x$ را به ازای $x = ۷/۵^\circ$ را محاسبه نمایید.

پاسخ: ۱

$$۲\,\text{Sin}\,۲x\,\text{Cos}\,۲x = \text{Sin}\,۴x = \text{Sin}\,۴(۷/۵^\circ) = \frac{۱}{۲}$$

۴۱ مثلثی با مساحت $۸\sqrt{۲}$ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه‌ی دو ضلع این مثلث به‌ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

پاسخ: ۱

$$\frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۸\,\text{Sin}\,\theta = ۸\sqrt{۲} \Rightarrow \text{Sin}\,\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ, \theta = ۱۳۵^\circ$$

دو مثلث می‌توان رسم کرد.

۴۲ معادله مثلثاتی $۲\,\text{Cos}^۲ x = \text{Sin}\,x - ۱$ را حل کنید.

پاسخ: ۱

$$-۲\,\text{Sin}^۲ x - \text{Sin}\,x + ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{Sin}\,x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}\,,\ k \in Z \\ \text{Sin}\,x = \frac{-۳}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۴۳ مقدار $\text{Sin}\,۱۵^\circ$ را بیابید.

پاسخ: ۱

$$\text{Sin}\,۱۵^\circ = \sqrt{\frac{۱-\text{Cos}\,۳۰^\circ}{۲}} = \sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

۴۴ معادله‌ی مثلثاتی $۵ = (۹ - \text{Cos}\,x(۲\,\text{Cos}\,x$ را حل کنید.

پاسخ: ۱

$$۲\,\text{Cos}^{۲}x - ۹\,\text{Cos}\,x - ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{Cos}\,x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲\text{k}\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \\ \text{Cos}\,x = ۵ \end{cases}$$

$\text{Cos}\,x = ۵$ غ ق ق

۴۵ معادله $۰ = \sqrt{۲} - \text{Sin}\,۳x\,۲$ را حل کنید.

پاسخ: ۱

$$\text{Sin}\,۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \text{Sin}\,\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲\text{k}\pi + \frac{\pi}{۴} \\ ۳x = ۲\text{k}\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲\text{k}\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \\ x = \frac{۲\text{k}\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} \end{cases} (k \in \text{Z})$$

۴۶ معادله مثلثاتی $۰ = \text{Cos}\,۳x - \text{Cos}\,x$ را حل کنید.

پاسخ: ۱

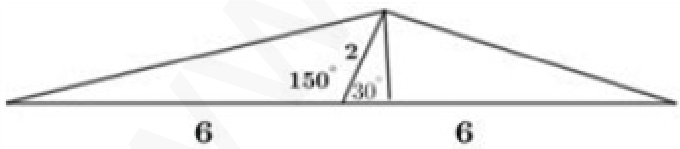
$$\text{Cos}\,۳x = \text{Cos}\,x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲\text{k}\pi + x \\ ۳x = ۲\text{k}\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲\text{k}\pi \\ ۴x = ۲\text{k}\pi \end{cases} (k \in \text{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \text{k}\pi \\ x = \frac{\text{k}\pi}{۲} \end{cases} (k \in \text{Z})$$

۴۷ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به‌ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

پاسخ: ۱

$$S = \frac{۱}{۲}\text{ab}\,\text{Sin}\,C = \frac{۱}{۲}\times ۲ \times ۶ \times \text{Sin}\,C = ۳$$

$$\text{Sin}\,C = \frac{۱}{۲} \Rightarrow C = ۳۰^\circ\,,\,۱۵۰^\circ$$



۴۸ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۲}=\operatorname{Sin}۳x$

ب) $\operatorname{Cos}۲x-\operatorname{Cos}x+۱=۰$

پ) $\operatorname{Cos}x=\operatorname{Cos}۲x$

ت) $\operatorname{Cos}۲x-۳\operatorname{Sin}x+۱=۰$

ث) $\operatorname{Cos}^{۲}x-\operatorname{Sin}x=\frac{۱}{۴}$

ج) $\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}۲x=۰$

پاسخ: ۱

الف) $\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۲}=\operatorname{Sin}۳x$

$$۱=\operatorname{Sin}۳x\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$$

ب) $\operatorname{Cos}۲x-\operatorname{Cos}x+۱=۰$

$$۲\operatorname{Cos}^{۲}x-۱-\operatorname{Cos}x+۱\Rightarrow \operatorname{Cos}x(۲\operatorname{Cos}x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Cos}x=۰\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ ۲\operatorname{Cos}x-۱=۰\Rightarrow \operatorname{Cos}x=\frac{۱}{۲}=\operatorname{Cos}\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

پ) $$\operatorname{Cos}x=\operatorname{Cos}۲x\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+۲x\Rightarrow x=-۲k\pi\\ x=۲k\pi-۲x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}$$

ت) $$\operatorname{Cos}۲x-۳\operatorname{Sin}x+۱=۰\Rightarrow ۱-۲\operatorname{Sin}^{۲}x-۳\operatorname{Sin}x+۱=۰\Rightarrow ۲\operatorname{Sin}^{۲}x+۳\operatorname{Sin}x-۲=۰$$

$$\frac{(۲\operatorname{Sin}x+۴)(۲\operatorname{Sin}x-۱)}{۲}=۰\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Sin}x=-۲\ \text{غ ق ق}\\ \operatorname{Sin}x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\end{cases}$$

ث) $$\operatorname{Cos}^{۲}x-\operatorname{Sin}x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۱-\operatorname{Sin}^{۲}x-\operatorname{Sin}x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \operatorname{Sin}^{۲}x+\operatorname{Sin}x-\frac{۳}{۴}=۰$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Sin}x=t} t^{۲}+t-\frac{۳}{۴}=۰\Rightarrow \Delta=۱+۳=۴\Rightarrow t=\frac{-۱\pm۲}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{Sin}x=\frac{۱}{۲}=\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\\ \operatorname{Sin}x=\frac{-۳}{۲}\ \text{غیرممکن}\end{cases}$$

ج) $$\operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}۲x=۰\Rightarrow \operatorname{Sin}x=\operatorname{Cos}۲x=\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{۲}-۲x\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}-۲x\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{۲}-۲x\right)\Rightarrow x=-۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

۴۹ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $۲۲/۵^\circ$ به دست آورید.

پاسخ: ۱

$$\operatorname{Sin}^۲ ۲۲/۵ = \frac{۱ - \operatorname{Cos} ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \operatorname{Sin} ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\operatorname{Cos}^۲ ۲۲/۵ = \frac{۱ + \operatorname{Cos} ۴۵^\circ}{۲} = \frac{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲ + \sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \operatorname{Cos} ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}{۲}$$

۵۰ فرض کنید $\operatorname{Cos} \alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\operatorname{Cos} ۲\alpha$ ب) $\operatorname{Sin} ۲\alpha$

پاسخ: ۱

$$\operatorname{Sin}^۲ \alpha = ۱ - \left(\frac{۵}{۱۳}\right)^۲ = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \Rightarrow \operatorname{Sin} \alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$$

الف) $\operatorname{Cos} ۲\alpha = ۲\operatorname{Cos}^۲ \alpha - ۱ = ۲ \times \frac{۲۵}{۱۶۹} - ۱ = -\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$

ب) $\operatorname{Sin} ۲\alpha = ۲\operatorname{Sin} \alpha . \operatorname{Cos} \alpha = ۲ \times \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$

۵۱ درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\operatorname{Cos}^۴ x - \operatorname{Sin}^۴ x = \operatorname{Cos} ۲x$$

پاسخ: ۱

$$\operatorname{Cos}^۴ x - \operatorname{Sin}^۴ x = \underbrace{(\operatorname{Cos}^۲ x - \operatorname{Sin}^۲ x)}_{(۰/۲۵)} \underbrace{(\operatorname{Cos}^۲ x + \operatorname{Sin}^۲ x)}_{(۰/۲۵)} = \operatorname{Cos} ۲x \underbrace{\times ۱}_{(۰/۲۵)} = \operatorname{Cos} ۲x$$

۵۲ فرض کنید $\text{tg}\,\alpha = -\frac{۱}{۲}$ و α زاویه‌ای منفرجه باشد، عبارت $\text{Cos}\,۲\alpha$ را محاسبه کنید.

پاسخ: ۱

$$\underbrace{\frac{۱}{\text{Cos}^۲\alpha} = ۱ + \text{tg}^۲\alpha}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\frac{۱}{\text{Cos}^۲\alpha} = ۱ + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\text{Cos}^۲\alpha = \frac{۴}{۵}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{\text{Cos}\,۲\alpha = ۲\text{Cos}^۲\alpha - ۱}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۲ \times \left(\frac{۴}{۵}\right) - ۱ = \frac{۳}{۵}}_{(۰/۲۵)}$$

(با توجه به این‌که در سؤال در اثر اشکال تایپی به جای $-\frac{۱}{۲}$ عدد $\frac{۱}{۲}$ تایپ شده است، در زمان تصحیح چنان‌چه داوطلب با $\frac{۱}{۲}$ حل نموده است، نمره کامل منظور گردد.) صفحات ۳۶ و ۳۷

۵۳ درستی برابری مقابل را ثابت کنید.

$$\frac{\text{Sin}\,۲\alpha}{۱ + \text{Cos}\,۲\alpha} = \tan\alpha$$

پاسخ: ۱

$$\underbrace{\frac{۲\sin\alpha\,\text{Cos}\,\alpha}{۱ + ۲\,\text{Cos}^۲\alpha - ۱}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\frac{۲\sin\alpha\,\text{Cos}\,\alpha}{۲\cos^۲\alpha}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha} = \tan\alpha}_{۰/۲۵}$$

۵۴ درستی تساوی مقابل را ثابت کنید:

$$\frac{\text{Sin}\,x}{۱ + \text{Cos}\,x} = \tan\frac{x}{۲}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{\text{Sin}\,x}{۱ + \text{Cos}\,x} = \frac{\overset{۰/۲۵}{۲\,\text{Sin}\frac{x}{۲}\text{Cos}\frac{x}{۲}}}{\underset{۰/۲۵}{۲\,\text{Cos}^۲\frac{x}{۲}}} = \frac{\text{Sin}\frac{x}{۲}}{\text{Cos}\frac{x}{۲}} = \tan\frac{x}{۲} \quad ۰/۲۵$$

۵۵ درستی اتحاد $\text{Sin}\,۲x = \frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x}$ را ثابت کنید.

پاسخ: ۱

$$\frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x} = \frac{۲\,\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x \cdot \frac{\text{Cos}^۲x + \text{Sin}^۲x}{\text{Cos}^۲x}} = \frac{۲\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}^۲x}{\text{Cos}\,x} = ۲\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x = \text{Sin}\,۲x$$

۰/۵ ۰/۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۵۶ فرض کنید $\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ و α زاویه‌ی حاده باشد. حاصل $\sin ۲\alpha$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ۱

$$۱ + \tan^۲\alpha \; ۰/۲۵ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۴}{۵} \; ۰/۲۵$$

$$\sin\alpha = \sqrt{۱ - \cos^۲\alpha} = \sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۲۵}} = \frac{۳}{۵} \; ۰/۲۵$$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \; ۰/۲۵ = ۲\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۴}{۵}\right) = \frac{۲۴}{۲۵} \; ۰/۲۵$$

۵۷ اگر $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ و α زاویه‌ی منفرجه باشد، حاصل $\tan ۲\alpha$ را به‌دست آورید.

پاسخ: ۱

$$\sin\alpha = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{۱ - \sin^۲\alpha} = -\frac{۴}{۵} \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{۳}{۴} \; ۰/۲۵$$

$$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲\alpha} = \frac{۲\left(-\frac{۳}{۴}\right)}{۱ - \left(-\frac{۳}{۴}\right)^۲} = -\frac{۲۴}{۷} \; ۰/۲۵$$

۵۸ درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cos ۲x = \frac{۱ - tg^۲x}{۱ + tg^۲x}$$

پاسخ: ۱

$$\frac{۱ - tg^۲x}{۱ + tg^۲x} = \frac{۱ - \frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}}{۱ + \frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}} \overset{۰/۲۵}{=} \frac{\frac{\cos^۲x - \sin^۲x}{\cos^۲x}}{\frac{\cos^۲x + \sin^۲x}{\cos^۲x}} \overset{۰/۲۵}{=} \frac{\cos^۲x - \sin^۲x}{\cos^۲x + \sin^۲x} \overset{۰/۲۵}{=} \frac{\cos^۲x - \sin^۲x}{۱ \; ۰/۲۵}$$

$$= \cos(۲x) \; ۰/۲۵$$

۵۹ درستی برابری زیر را ثابت کنید.

$$\cot\frac{x}{۲} - \tan\frac{x}{۲} = ۲\cot x$$

پاسخ: ۱

طرف چپ : $\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}} - \frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}} = \frac{\cos^۲\left(\frac{x}{۲}\right) - \sin^۲\left(\frac{x}{۲}\right)}{\sin\frac{x}{۲}.\cos\frac{x}{۲}} = \frac{\cos\left(۲\times\frac{x}{۲}\right)}{\frac{۱}{۲}\sin\left(۲\times\frac{x}{۲}\right)} = \frac{۲\cos x}{\sin x} = ۲\,\mathrm{Cotg}\,x$

۶۰ درستی برابری زیر را ثابت کنید.

$$\frac{۲}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \text{Sin}\,۲\alpha$$

پاسخ: ۱

$$\text{طرف چپ}: \frac{۲}{\text{tg}\,\alpha + \text{Cotg}\,\alpha} = \frac{۲}{\frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha} + \frac{\text{Cos}\,\alpha}{\text{Sin}\,\alpha}} = \frac{۲}{\frac{\text{Sin}^۲\alpha + \text{Cos}^۲\alpha}{\text{Sin}\,\alpha\ \text{Cos}\,\alpha}} = \frac{۲}{\frac{۱}{\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha}} = ۲\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$$

۶۱ معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جواب‌های آن را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ به‌دست آورید.

$$\text{Sin}^۳ x - \text{Sin}\, x = ۰$$

پاسخ: ۱

$$\text{Sin}\,x(\text{Sin}^۲ x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{Sin}\,x = ۰ \Rightarrow x = \text{k}\pi \\ \text{Sin}\,x = ۱ \Rightarrow x = ۲\text{k}\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{\text{k}\pi}{۲} \\ \text{Sin}\,x = -۱ \Rightarrow x = ۲\text{k}\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\text{جواب خاص} = \left\{۰, \frac{\pi}{۲}, \pi, \frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi\right\}$$

۶۲ معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جواب‌های آن را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ به‌دست آورید.

$$۲\,\text{Sin}\,x - \tan x = ۰$$

پاسخ: ۱

$$۲\,\text{Sin}\,x - \frac{\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x} = ۰ \Rightarrow \frac{۲\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x - \text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x} = ۰$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\,x(۲\,\text{Cos}\,x - ۱) = ۰ \begin{cases} \text{Sin}\,x = ۰ \Rightarrow x = \text{k}\pi \\ \text{Cos}\,x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲\text{k}\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲\text{k}\pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{جواب‌های خاص} = \left\{۰, \pi, ۲\pi, \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}\right\}$$

۶۳ معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$۲\,\text{Cos}\,x + \sqrt{۳} = ۰$$

پاسخ: ۱

$$\text{Cos}\,x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \text{Cos}\left(\frac{۵\pi}{۶}\right) \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۵\pi}{۶}$$

۶۴ عبارت مقابل را ساده کنید: $\dfrac{۱+\text{Cos}\,۲\alpha}{۱-\text{Cos}\,۲\alpha}$

پاسخ: ۱

$$\frac{۱+(۲\,\text{Cos}^{۲}\alpha-۱)}{۱-(۱-۲\,\text{Sin}^{۲}\alpha)}=\frac{۲\,\text{Cos}^{۲}\alpha}{۲\,\text{Sin}^{۲}\alpha}=\text{Cotg}^{۲}\alpha$$

۶۵ اگر α و β دو زاویه‌ی حاده باشند، داریم: $\text{Sin}\,\alpha=\dfrac{۳}{۵}$ و $\text{Sin}\,\beta=\dfrac{۸}{۱۷}$ ، عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\text{Sin}\,۲\alpha\,,\,\text{Cos}\,۲\alpha\,,\,\text{tg}\,۲\alpha\,,\,\text{Sin}\,۲\beta\,,\,\text{Cos}\,۲\beta\,,\,\text{tg}\,۲\beta$$

پاسخ: ۱

$$\text{Sin}\,\alpha=\frac{۳}{۵}\,,\text{Cos}\,\alpha=\frac{۴}{۵}\,,\text{tg}\,\alpha=\frac{۳}{۴}$$

$$\text{Sin}\,\beta=\frac{۸}{۱۷}\,,\text{Cos}\,\beta=\frac{۱۵}{۱۷}\,,\text{tg}\,\beta=\frac{۸}{۱۵}$$

$$\text{Sin}\,۲\alpha=۲\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha=۲\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$$

$$\text{Cos}\,۲\alpha=\text{Cos}^{۲}\alpha-\text{Sin}^{۲}\alpha=\frac{۱۶}{۲۵}-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۷}{۲۵}$$

$$\text{tg}\,۲\alpha=\frac{۲\,\text{tg}\,\alpha}{۱-\text{tg}^{۲}\alpha}=\frac{۲\times\frac{۳}{۴}}{۱-\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۲۴}{۷}$$

$$\text{Sin}\,۲\beta=۲\,\text{Sin}\,\beta\,\text{Cos}\,\beta=۲\times\frac{۸}{۱۷}\times\frac{۱۵}{۱۷}=\frac{۲۴۰}{۲۸۹}$$

$$\text{Cos}\,۲\beta=\text{Cos}^{۲}\beta-\text{Sin}^{۲}\beta=\frac{۲۲۵}{۲۸۹}-\frac{۶۴}{۲۸۹}=\frac{۱۶۱}{۲۸۹}$$

$$\text{tg}\,۲\beta=\frac{۲\,\text{tg}\,\beta}{۱-\text{tg}^{۲}\beta}=\frac{۲\times\frac{۸}{۱۵}}{۱-\frac{۶۴}{۲۲۵}}=\frac{۲۴۰}{۱۶۱}$$


دکتر الهه بنام
مدرس زیست رپیتیچ
مهندس شهاب نصیری
مدرس فیزیک رپیتیچ
مهندس علی داودندی
مدرس ریاضی رپیتیچ
دکتر متین هوشیار
مدرس شیمی رپیتیچ
رپیتیچ
سریعتر یاد بگیـــــــــــــــر...!
با اساتید رتبه برتر و رتبه پرور
به همراه مشاورین رتبه برتر
تو هم رتبه برتر میشی رفیق
rapiteach.com