رایگان

شب امتحان

ریاضی دوازدهم

دانلود جزوات
شب امتحان

رپیتیچ

ویدیو های
شب امتحان

سریعتر یادبگیرا

درس‌نامهٔ توپ برای شب امتحان

علی داودوندی
رتبه ۶۱ کنکور ریاضی
مدرس ریاضی رپیتیچ

فصل ۴ : مشتق — پایه دوازدهم

درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

تعریف مشتق

مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول $x = a$ به دو شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ (h متغیر است.)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ (x متغیر است.)

البته $f'(a)$ فقط وقتی تعریف شده است که حاصل حدهای بالا موجود و متناهی شود. یعنی به طور مثال اگر برای $f'(a)$ دو جواب مختلف به دست آمد یا حاصل $f'(a)$ برابر ∞ شود، مشتق f در a تعریف نشده است.

خط مماس بر منحنی

$f'(a)$ بیانگر شیب خط مماس بر منحنی در $x = a$ است.

مثال: معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^2 - 3x$ را در نقطهٔ $x = 1$ واقع بر منحنی به دست آورید.

روش اول:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 3(1+h) - (-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}} = 0 - 1 = -1$$

روش دوم:

www.rapiteach.com

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x-(-2)}{x-1}$$

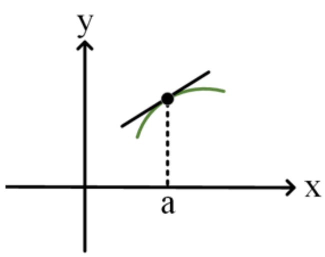
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=1-2=-1$$

از طرفی عرض نقطهٔ تماس برابر است با: $f(1)=-2$ لذا به کمک شیب یعنی عدد -1 و نقطهٔ $(1,-2)$ معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

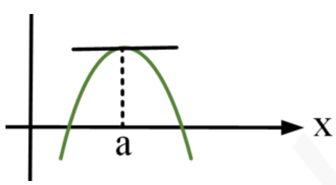
$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-(-2)=-1(x-1)$$

$$\Rightarrow y=-x+1-2\Rightarrow y=-x-1$$

نکته مهم:



$m_a>0\Leftrightarrow f'(a)>0$



$m_a=0\Leftrightarrow f'(a)=0$

تذکر مهم:هر چقدر خط به خط عمود نزدیک تر باشد عدد شیب عدد بزرگتری است.

تهیه دوره آموزشی و تستی ریاضی انیمیشنی **مهندس علی داودوندی مدرس ریاضی رپیتیچ**
با شماره ۰۹۱۰۶۳۷۳۶۴۲ - ۰۲۱۶۶۹۷۹۸۷۴ تماس بگیرید.

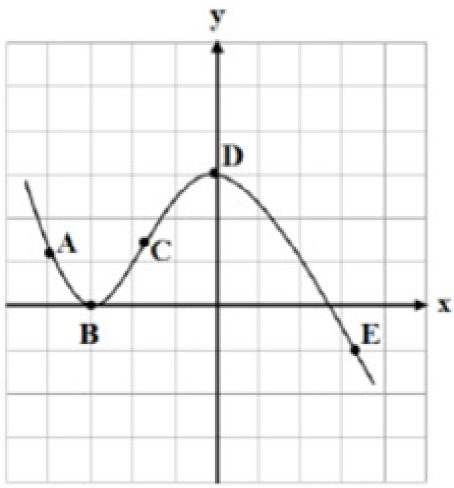
۱ با توجه به نمودار تابع مقابل:

الف) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟

ب) در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟

پ) در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟

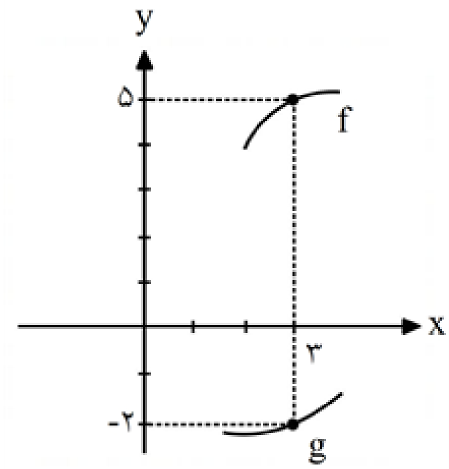
ت) شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.



پاسخ: ۱ الف) E　　ب) B　　پ) C　　ت) $m_D > m_A$

www.rapiteach.com

۲ با توجه به نمودار توابع f و g حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{f(x)g(x)+۲f(x)}{x^۲-۹}$ چند برابر $g'(۳)$ است؟



پاسخ: ۱

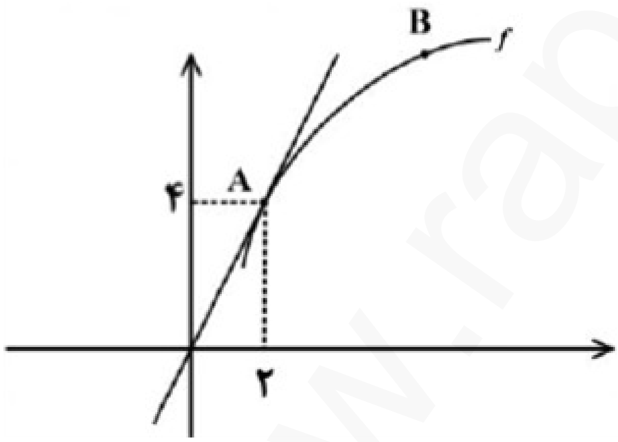
$$\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)g(x)+۲f(x)}{x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)(g(x)+۲)}{(x+۳)(x-۳)}$$
$$\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)}{x+۳}\times\lim_{x\to ۳}\frac{g(x)-(-۲)}{x-۳}=\frac{۵}{۶}\times g'(۳)=\frac{۵g'(۳)}{۶}$$

بنابراین حاصل $\frac{۵}{۶}$ ، $g'(۳)$ است.

۳ نمودار تابع f به صورت مقابل رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد:

الف) حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بیابید.

ب) شیب خط های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.



پاسخ: ۱

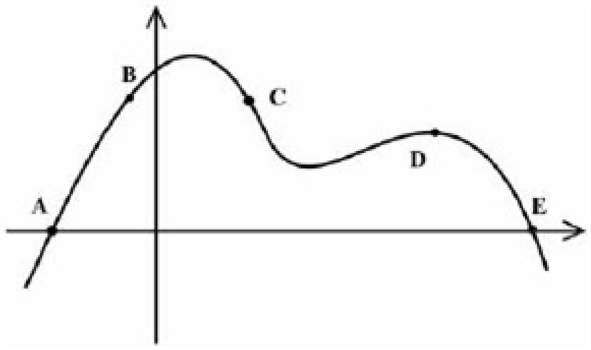
الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)=\dfrac{۴}{۲}=۲$

ب) $m_A>m_B$

۴ از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:

الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟



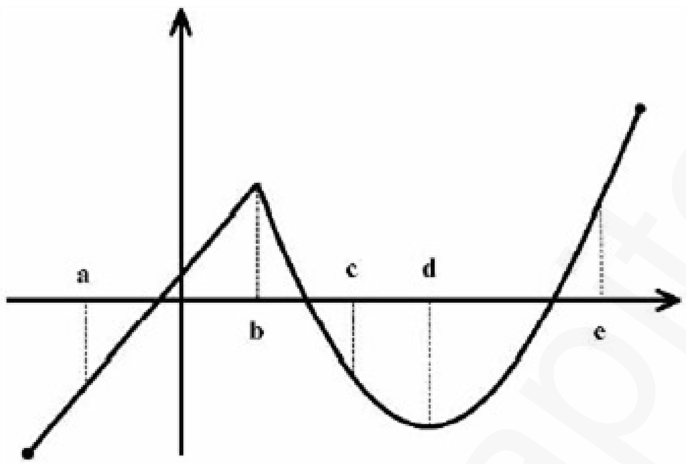
پاسخ: ۱ الف) A ب) C

۵ با درنظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل از بین نقاط مشخص شده مطلوب است طول نقطه‌ای که:

الف) تابع در آن مشتق‌پذیر نیست.

ب) مماس در آن موازی محور طول‌هاست

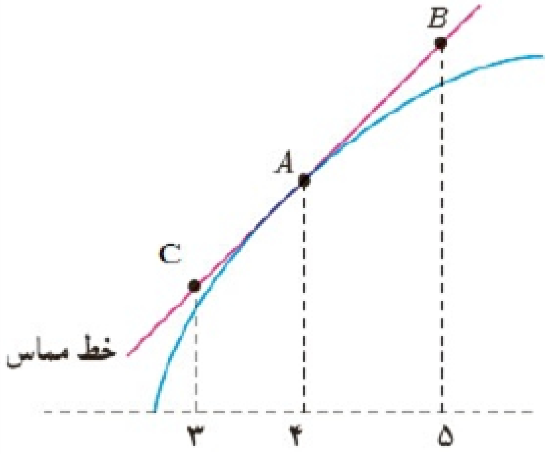
پ) مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است.



پاسخ: ۱ الف) b ب) d پ) e

www.rapteach.com

۶ برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.

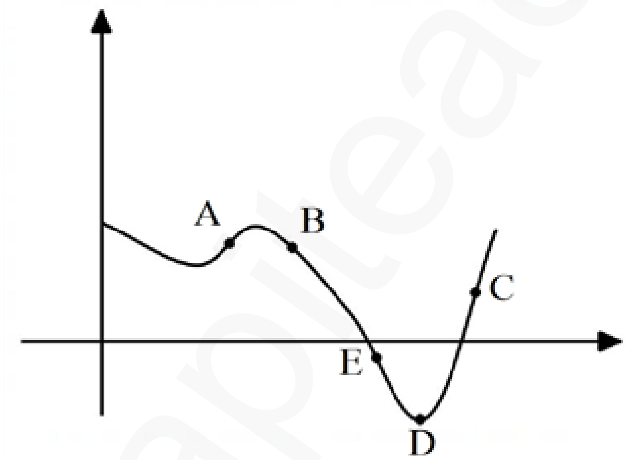


پاسخ: ۱

$$A(۴,۲۵) \Rightarrow ۱/۵=\frac{y_B-۲۵}{۵-۴}$$
$$B(۵,۲۶/۵), C(۳,۲۳/۵)$$

۷ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یک نقطه اضافی است)

نقطه	شیب
	-۳
	-۱
	۰
	۱



پاسخ: ۱

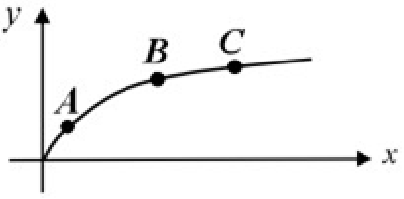
نقطه	A	D	B	E
شیب	۱	۰	-۱	-۳

۸ اگر $f(x)=x^۲-۳x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(۱)$ را حساب کنید.

پاسخ: ۱

$$f'(۱)=\lim_{x\to۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=-۱$$

۹ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.
با توجه به شکل روبه‌رو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه .... بزرگ‌تر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه B است.



پاسخ: ۱ A (۰/۲۵)

۱۰ اگر $f(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۱$، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

پاسخ: ۱

$$f(۲) = ۳(۲)^۲ - ۲(۲) + ۱ = ۹$$

$$f'(۲) = \lim_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x^۲ - ۲x + ۱ - ۹}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲} \frac{۳x^۲ - ۲x - ۸}{x - ۲}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{\cancel{(x - ۲)}(۳x + ۴)}{\cancel{x - ۲}} = \lim_{x \to ۲} (۳x + ۴) = ۱۰$$

معادله خط مماس $y - ۹ = ۱۰(x - ۲) \Rightarrow y = ۱۰x - ۱۱$


دکتر الهه بنام
مدرس زیست رپیتیچ
مهندس شهاب نصیری
مدرس فیزیک رپیتیچ
مهندس علی داودوندی
مدرس ریاضی رپیتیچ
دکتر متین هوشیار
مدرس شیمی رپیتیچ
رپیتیچ
سریعتر یاد بگیـــــــــــــــر...!
با اســاتید رتبه بــرتر و رتبــه پرور
بــه همــراه مشــاورین رتبــه برتر
تــو هــم رتبه برتــر میشــی رفیق
rapiteach.com